Математические модели
в экономике

Оглавление

1 Модели межотраслевого баланса. Теория неотрицательных матриц. 5
1.1 Модель межотраслевого баланса В. В. Леонтьева. 5
1.2 Продуктивная матрица. 7
1.3 Спектральные свойства неотрицательных матриц. 15
1.4 Неразложимые матрицы. 19
1.5 Устойчивые матрицы. 21
1.6 Идемпотентные аналоги теорем о неотрицаельных матрицах и их приложения. 28
1.6.1 Модель Канторовича-Макарова баланса знаний. 29
1.6.2 Арбитражные цепочки на валютных рынках. 30
1.6.3 Экономические индексы. 33
1.6.4 Теория выявленного предпочтения. 46

2 Экономическая интерпретация двойственности. 51
2.1 Некоторые сведения о двойственности в задачах линейного программирования. 51
2.2 Экономическая интерпретация двойственности. Трудовая теория стоимости и ее критика. 54
2.3 Декомпозиционные свойства цен и множителей Лагранжа. 66
2.4 Оценка эффективности новых технологий. 70
2.5 Экономическая интерпретация принципа максимума в моделях экономического роста. 72
2.6 Теорема о магистрали. 77
2.7 Модель Кокса-Росса-Рубинштейна 83
2.8 Теория арбитража. 89
2.9 Анализ экономических механизмов распределения ресурсов. . . . 89
2.9.1 Модель Хаутеккера-Иохансена. 89
2.9.2 Нелинейный межотраслевой баланс. 89
2.9.3 Максимизация объемов производства (административные механизмы распределения ресурсов). 89
2.9.4 «Хозрасчет». Максимизация нормативной чистой продукции. 89

2.9.5 Равновесные рыночные механизмы. 89

3 Математические модели коллективного поведения и экономического равновесия. 90

3.1 Некоторые сведения из теории игр. 91
3.2 Модель олигополии Курно. 91
3.3 Теорема Брауэра о неподвижной точке. 91
3.3.1 Барицентрические подразделения симплекса. 91
3.3.2 Лемма Шпернера. 91
3.4 Теорема Фань-Цзы. 91
3.4.1 Вариационное неравенство. 91
3.5 Модель Эрроу-Дебре. 91
3.5.1 Концепция конкурентного равновесия. Законы Вальраса. . . 91
3.5.2 Модификация функций спроса и предложения. 91
3.5.3 Сведение к вариационному неравенству (задаче дополнительности). 91
3.5.4 Существование решения задачи дополнительности. 91
3.6 Теоремы теории благосостояния. 91
3.7 Проблема коллективного выбора. 91
3.7.1 Борда против Кондорсе. Правило относительного большинства. 91
3.7.2 Парадокс Эрроу. 91
3.7.3 Теорема Гибборда-Саттертуэйта. 91
3.8 Теория мажоризации. 91

Обозначения.

Под перемножением векторов $\vec{x}\vec{y}$ подразумевается скалярное произведение. Где нужно, оно обозначается $\langle\cdot\ ,\cdot\rangle$.

Значок $^{\mathrm{T}}$ в A^{T} обозначает транспонирование матрицы. E — единичная матрица.

$\mathbb{R}^n$ — n-мерное вещественное пространство; $\mathbb{N}$ — натуральные числа; $\mathbb{C}^n$ — n-мерное комплексное пространство; $\mathrm{C}(\cdot), \mathrm{C}^1(\cdot)$ пространства непрерывных и дифференцируемых функций на $\cdot$ соответственно.

$[\ \cdot\ ]_i$ — i-я компонента вектора.

$\stackrel{\circ}{=}$ — вводимое обозначение. Например, $\hat{\vec{x}} \stackrel{\circ}{=} \frac{\vec{x}}{\sigma(t)}$ означает «обозначим $\frac{\vec{x}}{\sigma(t)}$ как $\hat{\vec{x}}$».

Если ссылка на теорему не указывает главу, значит, это теорема текущей главы.

Глава 1

Модели межотраслевого баланса. Теория неотрицательных матриц.

1.1 Модель межотраслевого баланса В. В. Леонтьева.

Будем называть отрасль *чистой*, если выпускаемая ею продукция однородна.

При построении модели межотраслевого баланса в СССР считали чистыми n=18 отраслей, хотя среди них попадались и отрасли с неоднородной продукцией (например, электроэнергия – гидро-, атомная и т. д.). В США эта модель была более подробной: n=96. Однако при увеличении количества рассматриваемых отраслей (до 1000) модель становилась не годной – не выполнялось основное предположение её построения, о котором скажем ниже.

Разобьем производственную систему на чистые отрасли и будем рассматривать временные ряды:

$x_i(t)$ – объём выпуска i-й отрасли в период времени t,

$z_{ij}(t)$ – количество продукции i-й отрасли, которое используется в качестве сырья j-й отраслью в период времени t,

$\omega_i(t)$ – конечный выпуск i-й отрасли в период времени t.

Наблюдая отдельный ряд, сложно делать какие-либо выводы об экономической системе (слишком много переменных). Но если разбить экономическую систему так, чтобы расходные коэффициенты

$$\frac{z_{ij}(t)}{x_j(t)} \approx a_{ij}$$

слабо зависели от времени (это и есть основная гипотеза), можно ввести *матрицу* *прямых затрат Леонтьева*:

$$A = \|a_{ij}\|_{i,j=\overline{1,n}}$$

В этом случае для замкнутой экономики выпуск будет зависеть от производственных нужд и конечного спроса следующим образом:

$$x_i(t) = \sum_{j=1}^{n} z_{ij}(t) + \omega_i(t) \ (i = 1, \ldots, n)$$

или

$$x_i(t) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(t) x_j(t) + \omega_i(t) \ (i = 1, \ldots, n)$$

Обозначим
$\vec{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ – вектор оъёма производства выпуска,
$\vec{\omega} = (\omega_1, \ldots, \omega_n)$ – вектор конечных выпусков (идущих потребителям, хозяйствам и т.д.).

Тогда *статическая модель Леонтьева* имеет следующий вид (по содержательному смыслу объём производства и конечный выпуск неотрицательны):

$$\vec{x} = A\vec{x} + \vec{\omega}$$

$$\vec{x} \geqslant 0, \quad \vec{\omega} > 0$$

Напомним, что матрица $A = \|a_{ij}\|_{i,j=\overline{1,n}}$ называется *неотрицательной* тогда и только тогда, когда $a_{ij} \geqslant 0 \ (i, j = \overline{1, n})$

Жизнеспособна ли эта экономика?

Определение 1. Матрица $A = \|a_{ij}\|_{i,j=\overline{1,n}}$ является *продуктивной*, если

$$\exists \vec{x} \geqslant 0, \ \vec{\omega} > 0 \mid \vec{x} = A\vec{x} + \vec{\omega}$$

Простейшая *динамическая модель Леонтьева*

$$\vec{x}(t) = A\vec{x}(t+1) + \vec{\omega}(t+1)$$

по сути постулирует, что произведенный выпуск можно потребить только в следующий момент времени.

Рассмотрим *режим сбалансированного роста* с темпом s:

$$\vec{x}(t) = s^t \vec{x}$$

$$\vec{\omega}(t) = s^t \vec{\omega}$$

С какими темпами может развиваться модель сбалансированного роста?

$$s^t \vec{x} = s^{t+1} A\vec{x} + s^{t+1}\vec{\omega} \mid \ : s^{t+1}$$

$$(\frac{1}{s}E - A)\vec{x} = \vec{\omega}$$
$$\vec{x} \geqslant 0,\ \vec{\omega} > 0$$

Обозначим $D = (\frac{1}{s}E - A) = \|d_{ij}\|_{i,j=\overline{1,n}}$, где

$$d_{ij} \leqslant 0,\ i \neq j \tag{1.1}$$

Тогда полученное соотношение перепишется в виде:

$$D\vec{x} = \vec{\omega}$$

$$\vec{x} \geqslant 0,\ \vec{\omega} > 0$$

Определение 1'. Будем говорить, что матрица $D = \|d_{ij}\|_{i,j=\overline{1,n}}$, удовлетворяющая (1.1), является *продуктивной*, если

$$\exists \vec{x} \geqslant 0,\ \vec{\omega} > 0 \mid D\vec{x} = \vec{\omega}$$

Замечание. Если $D = E - A$, то D *продуктивна* в смысле определения 1' $\Leftrightarrow$ A *продуктивна* в смысле определения 1.

1.2 Продуктивная матрица.

Теорема 1. *Пусть* $D = \|d_{ij}\|_{i,j=\overline{1,n}}$, *удовлетворяет (1.1). Тогда следующие утверждения эквивалентны:*

1) $\exists \vec{x} \geqslant 0,\ \vec{\omega} > 0 \mid D\vec{x} = \vec{\omega}$

2) $\forall \vec{\omega} \geqslant 0\ \exists \vec{x} \geqslant 0 \mid D\vec{x} = \vec{\omega}$

3) все последовательные главные миноры положительны, т. е.

$$det \begin{pmatrix} d_{11} & d_{12} & \dots & d_{1k} \\ d_{21} & d_{22} & \dots & d_{2k} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ d_{k1} & d_{k2} & \dots & d_{kk} \end{pmatrix} > 0, \quad k = \overline{1, n}$$

4) $\forall\ 1 \leqslant i_1 < i_2 < \dots < i_k \leqslant n$

$$det \begin{pmatrix} d_{i_1 i_1} & d_{i_1 i_2} & \dots & d_{i_1 i_k} \\ d_{i_2 i_1} & d_{i_2 i_2} & \dots & d_{i_2 i_k} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ d_{i_k i_1} & d_{i_k i_2} & \dots & d_{i_k i_k} \end{pmatrix} > 0$$

**Условие 3 или 4 известно как условие Хокинса-Саймона.*

Доказательство. *Шаг 1* Покажем, что из 1)⇒3) (индукцией по n).

Для $n = 1$ из $d_{11}x_1 = \omega_1,\ x_1 \geqslant 0,\ \omega_1 > 0 \Rightarrow d_{11} > 0$ – т. е. утверждение шага верно. Пусть оно верно для $n - 1$. Покажем, что оно верно и для n. Рассмотрим систему:

$$\begin{cases} d_{11}x_1 + d_{12}x_2 + \ldots + d_{1n}x_n = \omega_1, & x_1 \geqslant 0, \ldots, x_n \geqslant 0 \\ d_{21}x_1 + d_{22}x_2 + \ldots + d_{2n}x_n = \omega_2, & \omega_1 > 0, \ldots, \omega_n > 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \\ d_{n1}x_1 + d_{n2}x_2 + \ldots + d_{nn}x_n = \omega_n & \end{cases} \tag{1.2}$$

С учетом ограничений на $\vec{x}$, $\vec{\omega}$ и условия на коэффициенты матрицы D, из первого уравнения системы получим:

$$d_{11}x_1 = \omega_1 - d_{12}x_2 - \ldots - d_{1n}x_n > 0 \Rightarrow d_{11} > 0$$

Теперь выразим x_1 и исключим его методом Гаусса из остальных уравнений системы (1.2). Получим:

$$d_{11}x_1 + d_{12}x_2 + \ldots + d_{1n}x_n = \omega_1$$

$$\begin{cases} \hat{d}_{22}x_2 + \ldots + \hat{d}_{2n}x_n = \hat{\omega}_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \hat{d}_{n2}x_2 + \ldots + \hat{d}_{nn}x_n = \hat{\omega}_n \end{cases} \tag{1.3}$$

где

$$\begin{aligned} \hat{d}_{ij} &= d_{ij} - \frac{d_{i1}}{d_{11}}d_{1j},\ i, j = 2, \ldots, n \\ \hat{\omega}_i &= \omega_i - \frac{d_{i1}}{d_{11}}\omega_1,\ i = 2, \ldots, n \end{aligned} \tag{1.4}$$

Заметим, что $\hat{d}_{ij} \leqslant 0$ при $i \neq j$, а $\hat{\omega}_i > 0$. Тогда матрица $\hat{D} = ||\hat{d}_{ij}||_{i,j=\overline{2,n}}$ удовлетворяет условию (1.1). По индуктивному предположению

$$det \begin{pmatrix} \hat{d}_{22} & \ldots & \hat{d}_{2k} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \hat{d}_{k2} & \ldots & \hat{d}_{kk} \end{pmatrix} > 0 \ (k = \overline{2, n}) \tag{1.5}$$

В силу линейности преобразования системы (1.2) в (1.3), имеем:

$$det \begin{pmatrix} d_{11} & d_{12} & \ldots & d_{1k} \\ d_{21} & d_{22} & \ldots & d_{2k} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ d_{k1} & d_{k2} & \ldots & d_{kk} \end{pmatrix} = det \begin{pmatrix} d_{11} & d_{12} & \ldots & d_{1k} \\ 0 & \hat{d}_{22} & \ldots & \hat{d}_{2k} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & \hat{d}_{k2} & \ldots & \hat{d}_{kk} \end{pmatrix} = d_{11} det \begin{pmatrix} \hat{d}_{22} & \ldots & \hat{d}_{2k} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \hat{d}_{k2} & \ldots & \hat{d}_{kk} \end{pmatrix} > 0 \tag{1.6}$$

Тем самым мы показали, что система (1.2) удовлетворяет 3).

Шаг 2 Теперь покажем, что из 3)$\Rightarrow$2) (тоже индукцией по n).

Для $n = 1$ из $d_{11}x_1 = \omega_1$ получаем, что $x_1 = \frac{1}{d_{11}}\omega_1 \geqslant 0$ при $\omega_1 \geqslant 0$, т. е. утверждение шага верно. Пусть оно верно для $n-1$. Покажем, что тогда оно верно и для n.

Если (1.2) удовлетворяет условию Хокинса-Саймона 3), то, в частности, $d_{11} > 0$, так что верно преобразование из (1.2) в (1.3) и выполнено (1.6). При этом элементы $\hat{d}_{ij}$ вычисляются по формуле (1.4).

Из (1.6) $\Rightarrow$ (1.5) в силу $d_{11} > 0$. Значит, $\hat{D}$ удовлетворяет условию Хокинса-Саймона 3) и условию (1.1).

Так как $\omega_i \geqslant 0$ и $d_{i1} \leqslant 0$ в соотношении (1.4), то $\hat{\omega}_i \geqslant 0$ $(i = 2, \ldots, n)$. Тогда, по предположению индукции, для системы (1.3) $\exists x_2 \geqslant 0, \ldots, x_n \geqslant 0$. Осталось найти x_1:

$$x_1 = \frac{1}{d_{11}}(\omega_1 - d_{12}x_2 - \ldots - d_{1n}x_n) \geqslant 0$$

неотрицателен, т.к. $d_{11} > 0,\ \omega_1 \geqslant 0,\ d_{1i} \leqslant 0$ $(i = 1, \ldots, n)$

Таким образом, для $\forall$ набора $\vec{\omega}$ нашли $\vec{x} \geqslant 0$, удовлетворяющий системе (1.2), т. е. выполнено 2).

Шаг 3 Очевидно, что из 1)$\Rightarrow$3)$\Rightarrow$2)$\Rightarrow$1), и что из 4)$\Rightarrow$3).

Шаг 4 Покажем, что из 2)$\Rightarrow$4). Это завершит доказательство теоремы.

Пусть $1 \leqslant i_1 < i_2 < \ldots < i_k \leqslant n$. Нужно показать, что

$$det \begin{pmatrix} d_{i_1i_1} & d_{i_1i_2} & \ldots & d_{i_1i_k} \\ d_{i_2i_1} & d_{i_2i_2} & \ldots & d_{i_2i_k} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ d_{i_ki_1} & d_{i_ki_2} & \ldots & d_{i_ki_k} \end{pmatrix} > 0 \qquad (*)$$

Рассмотрим перестановку

$$\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & k & \ldots & n \\ i_1 & i_2 & \ldots & i_k & \ldots & i_n \end{pmatrix}$$

ей соответствует матрица перестановки E_π:

$$E_\pi \vec{x} = \begin{pmatrix} x_{i_1} \\ \vdots \\ x_{i_n} \end{pmatrix},\ E_\pi^T E_\pi = E$$

Считаем выполненным условие 2): $\forall\vec{\omega} \geqslant 0\ \exists\vec{x} > 0 \mid D\vec{x} = \vec{\omega}$
домножив его слева на E_π, получим: $E_\pi D\vec{x} = E_\pi\vec{\omega}$.

Заметим, что $E_\pi\vec{\omega} = \vec{\omega}_\pi \geqslant 0 \Leftrightarrow \vec{\omega} \geqslant 0$. Тогда, обозначив $E_\pi D E_\pi^T = D_\pi,\ E_\pi\vec{x} = \vec{x}_\pi$, получим условие 2) для матрицы D_π:

$$\forall\vec{\omega}_\pi \geqslant 0\ \exists\vec{x}_\pi > 0 \mid D_\pi\vec{x}_\pi = \vec{\omega}_\pi$$

а у матрицы D_π минор $(*)$ является последовательным главным – значит положителен.

■

Замечание. Обсудим содержательный смысл доказанной теоремы для случая статической модели Леонтьева:

$$\vec{x} = A\vec{x} + \vec{\omega},\ A \geqslant 0$$

$n = 1$. Все производство консолидировано в одну отрасль.

$$x_1 = a_{11}x_1 + \omega_1$$

Когда такая отрасль продуктивна? Ясно, что в случае, когда затраты на производство превышают имеющиеся ресурсы ($a_{11} > 1$), экономическая система не жизнеспособна. Таким образом, условие продуктивности системы есть $a_{11} < 1$ (в этом случае $D = \|1 - a_{11}\|$ состоит из одного элемента).

$n = 2$.

$$\begin{cases} x_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \omega_1 \\ x_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \omega_2 \end{cases}$$

Опять же, условия $a_{11} < 1,\ a_{22} < 1$ являются необходимыми для продуктивности системы, но не достаточными. Выразим из второго уравнения объём выпуска 2-й отрасли и подставим в первое:

$$x_1 = \left(a_{11} + \frac{a_{12}a_{21}}{1 - a_{22}}\right)x_1 + \omega_1 + \frac{a_{12}}{1 - a_{22}}\omega_2$$

Теперь условие продуктивности системы $\left(a_{11} + \frac{a_{12}a_{21}}{1-a_{22}}\right) < 1$ более сильное. Здесь кроме затрат на производство продукта 1-й отраслью учитываются еще и косвенные. В случае, когда это условие не выполняется реализуется избыточный производственный контур.

По теореме 1, необходимым и достаточным условием продуктивности матрицы

$$D = \begin{pmatrix} 1 - a_{11} & -a_{12} \\ -a_{21} & 1 - a_{22} \end{pmatrix}$$

будет условие положительности главных миноров: $detD = (1 - a_{11})(1 - a_{22}) - a_{12}a_{21} > 0$ – а это и есть условие продуктивности системы, показанное выше.

Таким образом, не продолжая выкладок для бо́льших n, можно утверждать, что выполнение условия Хокинса-Саймона говорит об отсутствии избыточного производственного контура.

В середине 80-х годов в СССР в процессе перехода от централизованно планируемой экономики к рыночной наблюдалась отрицательная добавленная стоимость обрабатывающих отраслей. Однако либерализация цен в начале 90-х показала состоятельность этих отраслей вплоть до экспорта продукции за рубеж. В США даже приняли доктрину по увеличению таможенной пошлины (в рамках протекционизма) в отношении продукции из России. Определим понятие добавленной стоимости.

Пусть $\vec{p} = (p_1, \ldots, p_n)$ – вектор цен. На выпуск единичной продукции i-й отрасли мы затрачиваем a_{ji} продукции j-й отрасли. Тогда *добавленная стоимость* единичной продукции i-й отрасли есть

$$\pi_i = p_i - \sum_{j=1}^{n} p_j a_{ji} \ (i = \overline{1, n}),$$

а вектор добавленных стоимостей от производства единичной продукции отрасли есть $\vec{\pi} = (\pi_1, \ldots, \pi_n)$.

В 60-70-е годы правительство СССР хотело перевести экономику страны на так называемый «хозрасчет». В то время цены назначались административно. Это приводило к дисбалансам на рынке потребительских товаров, которые, однако, компенсировались за счет развития топливно-энергетического комплекса в 70-е годы: продукция ТЭК (нефть, газ и т.д.) экспортировалась в Европу, становились возможными покупки импортных товаров потребления – возмещался дефицит собственной продукции. Тем не менее, задача не выполнялась, несмотря на квалификацию кадров. Какая именно задача ставилась перед ними?

Найти $\vec{\pi} > 0$, $\vec{p} \geqslant 0 \mid \vec{p} - A^T\vec{p} = \vec{\pi}$, где A^T - прибыльная матрица.

На вопрос, как связана прибыльность с продуктивностью, ответит теорема 1'.

Теорема 1'. *Пусть* $D = \|d_{ij}\|_{i,j=\overline{1,n}}$, *удовлетворяет (1.1). Тогда следующие утверждения эквивалентны:*

1) $\exists \vec{x} \geqslant 0, \ \vec{\omega} > 0 \mid D\vec{x} = \vec{\omega}$

2) $\forall \vec{\omega} \geqslant 0 \ \exists \vec{x} \geqslant 0 \mid D\vec{x} = \vec{\omega}$

3) все последовательные главные миноры матрицы D *положительны, т. е.*

$$det \begin{pmatrix} d_{11} & d_{12} & \ldots & d_{1k} \\ d_{21} & d_{22} & \ldots & d_{2k} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ d_{k1} & d_{k2} & \ldots & d_{kk} \end{pmatrix} > 0 \ (k = \overline{1, n})$$

4) $\forall\ 1 \leqslant i_1 < i_2 < \ldots < i_k \leqslant n$

$$det \begin{pmatrix} d_{i_1 i_1} & d_{i_1 i_2} & \ldots & d_{i_1 i_k} \\ d_{i_2 i_1} & d_{i_2 i_2} & \ldots & d_{i_2 i_k} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ d_{i_k i_1} & d_{i_k i_2} & \ldots & d_{i_k i_k} \end{pmatrix} > 0$$

5) $\exists \vec{\pi} > 0,\ \vec{p} \geqslant 0 \mid D^T\vec{p} = \vec{\pi}$,
(т. е. прибыльность эквивалентна продуктивности),

6) $\forall \vec{\pi} \geqslant 0\ \exists \vec{p} \geqslant 0 \mid D^T\vec{p} = \vec{\pi}$,

7) все последовательные главные миноры матрицы D^T *положительны,*

8) все главные миноры матрицы D^T *положительны,*

9) $\exists D^{-1} \geqslant 0$.

Почему компетентный орган не может решить поставленную задачу в течение десятилетий? Шла гонка вооружений. Каждой из конкурирующих стран хотелось добиться лидерства в технологических сферах, например, в таких наукоемких отраслях как химизация, где разрабатывались и исследовались новые материалы. Но если в США этот переход был оправдан, то в СССР потребности в такой продукции не было. Да, отрасли существовали, но они были «оторваны» от населения. Вследствие чего, сельское хозяйство велось неэффективно, слабо развивалось машиностроение. По данным США в СССР на военную промышленность тратилось 5% ВВП и до 15% в начале 90-х годов. Цены нужно было назначать так, чтобы доля военных расходов не превосходила расходов на потребительские нужды, т. е. если рассмотреть статическую модель Леонтьева: $\vec{x} = A\vec{x} + \vec{\omega} + \hat{A}\vec{y}$, *где* A *отвечает за потребительские расходы, а* $\hat{A}$ *за расходы на ВПК, то должно выполняться*

$$(\vec{p}; \hat{A}\vec{y}) \leqslant \alpha(\vec{p}; \vec{\omega} + \hat{A}\vec{y}) = \alpha(\vec{\pi}; \vec{x}),$$

где $\vec{p} = A^T\vec{p} + \vec{\pi}$.

Доказательство. по теореме 1 для матрицы D имеем: 1) $\Leftrightarrow$ 2) $\Leftrightarrow$ 3) $\Leftrightarrow$ 4);
по теореме 1 для матрицы D^T имеем: 5) $\Leftrightarrow$ 6) $\Leftrightarrow$ 7) $\Leftrightarrow$ 8).
Очевидно 3) $\Leftrightarrow$ 7).

Так как $D\vec{x} = \vec{\omega} \Leftrightarrow \vec{x} = D^{-1}\vec{\omega}$, то $\forall \vec{\omega} \geqslant 0\ \exists \vec{x} = D^{-1}\vec{\omega} \geqslant 0$ т. е. из 9) $\Rightarrow$ 2).

Покажем, что из 2)$\Rightarrow$9). Из 2) — из того, что 2) эквивалентно 3), а из 3)$\Rightarrow$ $detD \neq 0 \Rightarrow \exists D^{-1}$ — следует, что $\forall \vec{\omega} \geqslant 0$ выполнено $D^{-1}\vec{\omega} \geqslant 0$. Тогда и для любого единичного вектора $\vec{e}_i$ выполнено $D^{-1}\vec{e}_i \geqslant 0$. Но $D^{-1}\vec{e}_i$ – i-й столбец матрицы D^{-1}, а i – любое от 1 до $n \Rightarrow D^{-1} \geqslant 0$. ■

Из математического анализа известно, что ряд $1 + a + a^2 + \ldots + a^k + \ldots = \frac{1}{1-a}$ при $0 \leqslant a < 1$. Выясним, при каких условиях эта формула верна, в случае, когда a – матрица.

Теорема 2. *Пусть* $A = \|a_{ij}\|_{i,j=\overline{1,n}} \geqslant 0$. *Тогда*

1) если $\exists(\rho E - A)^{-1} \geqslant 0$, *то* $\rho > 0$, *ряд*

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{\rho^{k+1}} A^k \tag{1.7}$$

сходится и его сумма равна $(\rho E - A)^{-1}$.

2) если $\rho > 0$ *и ряд (1.7) сходится, то* $\exists(\rho E - A)^{-1} \geqslant 0$.
(т. е. продуктивность матрицы $(\rho E - A)^{-1}$ *является необходимым и достаточным условием сходимости ряда (1.7)).*

Доказательство. 1) По теореме 1' $\rho - a_{11} > 0$ (как первый последовательный главный минор), $\Rightarrow$ $\rho > a_{11} \geqslant 0$.

Рассмотрим последовательные частичные суммы ряда (1.7): $T_s = \sum\limits_{k=0}^{s} \frac{1}{\rho^{k+1}} A^k$. Они образуют монотонную последовательность

$$0 \leqslant T_0 \leqslant T_1 \leqslant \ldots \leqslant T_s \leqslant T_{s+1} \leqslant \ldots$$

$$(\rho E - A) T_s = \sum_{k=0}^{s} \frac{1}{\rho^k} A^k - \sum_{k=0}^{s} \frac{1}{\rho^{k+1}} A^{k+1} = E - \frac{1}{\rho^{s+1}} A^{s+1}$$

Итак,

$$(\rho E - A) T_s = T_s (\rho E - A) = E - \frac{1}{\rho^{s+1}} A^{s+1} \tag{1.8}$$

Пользуясь тем, что $\exists(\rho E - A)^{-1} \geqslant 0$, домножим (1.8) на $(\rho E - A)^{-1}$:

$$T_s = (\rho E - A)^{-1} (\rho E - A) T_s = (\rho E - A)^{-1} - \frac{1}{\rho^{s+1}} (\rho E - A)^{-1} A_{s+1} \leqslant (\rho E - A)^{-1} \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ в силу ограниченности монотонной последовательности, она сходится:

$$\exists \lim_{s \to \infty} T_s = T$$

Тогда, устремив $s \to \infty$ в формуле

$$\rho (T_{s+1} - T_s) = \frac{1}{\rho^{s+1}} A^{s+1}, \tag{1.9}$$

получим:

$$\lim_{s \to \infty} \frac{1}{\rho^{s+1}} A^{s+1} = 0 \tag{1.10}$$

Теперь перейдем к пределу в (1.8), зная (1.10):

$$(\rho E - A) T = T (\rho E - A) = E$$

Значит
$$T = (\rho E - A)^{-1} \tag{1.11}$$

2) Теперь $\rho > 0$ и ряд (1.7) сходится, т. е.

$$\exists \lim_{s\to\infty} T_s = T$$

Тогда из (1.9) в пределе получаем (1.10), в силу чего, из (1.8) предельным переходом получаем $(\rho E - A)T = T(\rho E - A) = E$. Это означает, что матрица $(\rho E - A)$ обратима и выполнено (1.11). А т. к. $T_s \geqslant 0$, то и $T \geqslant 0 \Rightarrow (\rho E - A)^{-1} \geqslant 0$. ■

Замечание. Предположим, что в статической модели Леонтьева

$$\vec{x} = A\vec{x} + \vec{\omega}$$

матрица полных затрат продуктивна, т. е. $\exists (E - A)^{-1} \geqslant 0$, причем

$$(E - A)^{-1} = E + A + A^2 + \ldots + A^k + \ldots$$

Тогда
$$\vec{x} = (E - A)^{-1}\vec{\omega} = \vec{\omega} + A\vec{\omega} + A^2\vec{\omega} + \ldots + A^k\vec{\omega} + \ldots$$
где $A\vec{\omega}$ – сырье для производства, $A^2\vec{\omega}$ – сырье, необходимое для производства сырья и т.д.

В свою очередь, цены связаны с добавленной стоимостью соотношением:

$$\vec{p} = (E - A)^{-1}\vec{\pi} = \vec{\pi} + A^T\vec{\pi} + (A^T)^2\vec{\pi} + \ldots + (A^T)^k\vec{\pi} + \ldots$$

(в исследованиях ограничиваются использованием слагаемых второго порядка).

Упражнение 1.

Пусть $A = \|a_{ij}\|_{i,j=\overline{1,n}} \geqslant 0$,

$s_i = \sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij}$, $\|A\|_1 = \max\limits_{i\in\overline{1,n}} s_i$, $r_j = \sum\limits_{i=1}^{n} a_{ij}$, $\|A\|_2 = \max\limits_{j\in\overline{1,n}} r_j$.

Доказать, что A продуктивна, если $\|A\|_1 < 1$ или $\|A\|_2 < 1$.

Упражнение 2.

Пусть $A = \|a_{ij}\|_{i,j=\overline{1,n}} \geqslant 0$, $A^T = A$.

Доказать, что A является продуктивной тогда и только тогда, когда $(E - A)$ является положительно определенной матрицей.

1.3 Спектральные свойства неотрицательных матриц.

Рассмторим матрицу $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} > 0$. $det \begin{pmatrix} -\lambda & -1 \\ 1 & -\lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 + 1,\ \lambda_{1,2} = \pm i,$ т. е. у вещественной матрицы могут быть невещественные собственные числа, а значит и невещественные собственные векторы. Неотрицательная матрица обладает замечательным свойством – у нее есть неотрицательное вещественное собственное число и соответсвующий неотрицательный вещественный собственный вектор.

Лемма 1. *Пусть* $A = \|a_{ij}\|_{i,j=\overline{1,n}} \geqslant 0$ *и* $M(A) = \{\rho \mid \exists(\rho E - A)^{-1} \geqslant 0\}$. *Тогда* $M(A) = (\lambda(A), +\infty)$, *где* $\lambda(A) \geqslant 0$.

Доказательство. 1) Покажем, что $M(A) \neq \varnothing$. Зафиксируем $\vec{x} > 0$.

$$\max_{i \in \overline{1,n}} \frac{[A\vec{x}]_i}{[\vec{x}]_i} < \hat{\rho} \ \Rightarrow\ \hat{\rho} > \frac{[A\vec{x}]_i}{[\vec{x}]_i}\ \forall i = \overline{1,n}.$$

$\hat{\rho}\vec{x} > A\vec{x} \ \Rightarrow\ (\hat{\rho}E - A)$ – продуктивна, следовательно, по теореме 1' , $\exists(\hat{\rho}E - A)^{-1}$, т. е. $\hat{\rho} \in M(A)$.

2) Покажем, что если $\eta > \rho$ и $\rho \in M(A)$, то $\eta \in M(A)$.

$$\exists(\rho E - A)^{-1} \geqslant 0 \xrightarrow{\text{по теореме 1'}} \exists \vec{x} \geqslant 0 \mid \rho\vec{x} > A\vec{x},$$

$\eta\vec{x} \geqslant \rho\vec{x} \Rightarrow (\eta E - A)$ – продуктивна $\xrightarrow{\text{по теореме 1'}} \eta \in M(A)$

3) $\lambda(A) = \inf\{\rho \mid \rho \in M(A)\} \geqslant 0$ (см. теорему 2)
в силу 2) $M(A) = (\lambda(A), +\infty)$ или $M(A) = [\lambda(A), +\infty)$.

Покажем, что $\lambda(A) \notin M(A)$. Допустим противное, т. е. $\lambda(A) \in M(A)$.
Тогда по теореме 1' $\exists \vec{x} \geqslant 0 \mid \lambda(A)\vec{x} > A\vec{x} \Rightarrow$
$\Rightarrow \exists \varepsilon > 0 \mid (\lambda(A) - \varepsilon)\vec{x} > A\vec{x} \Rightarrow ((\lambda(A) - \varepsilon)E - A)$ продуктивна по определению $\Rightarrow (\lambda(A) - \varepsilon) \in M(A)$ – противоречие с определением $\lambda(A)$. ■

Лемма 2. *Пусть* $A = \|a_{ij}\|_{i,j=\overline{1,n}} \geqslant 0$. *Тогда среди собственных чисел матрицы A есть хотя бы одно неотрицательное собственное число, и наибольшему из них* $\lambda(A)$ *соответсвует неотрицательный собственный вектор* $\vec{x}_A \geqslant 0$ *(т. е.* $A\vec{x}_A = \lambda(A)\vec{x}_A$, $\vec{x}_A \neq 0$*).*

Доказательство. 1) Положим для $\rho \in M(A)$ и фиксированного вектора $\vec{\omega} > 0$ $\vec{x}(\rho) \overset{\circ}{=} (\rho E - A)^{-1}\vec{\omega} \geqslant 0$.
Покажем, что зависимость компонент вектора $\vec{x}$ от ρ монотонная и возрастающая,

т. е. если $\eta > \rho > \inf\{\alpha \mid \exists(\alpha E - A)^{-1} \geqslant 0\} = \lambda(A)$, то $\vec{x}(\eta) \leqslant \vec{x}(\rho)$.

$$\begin{gathered}\rho\vec{x}(\rho) - A\vec{x}(\rho) = \vec{\omega} \\ \eta\vec{x}(\eta) - A\vec{x}(\eta) = \vec{\omega} \\ (\eta E - A)(\vec{x}(\rho) - \vec{x}(\eta)) + (\rho - \eta)\vec{x}(\rho) = 0 \\ \vec{x}(\rho) - \vec{x}(\eta) = \underbrace{(\eta - \rho)}_{\geqslant 0}\underbrace{(\eta E - A)^{-1}}_{\geqslant 0}\underbrace{\vec{x}(\rho)}_{\geqslant 0} \Rightarrow \vec{x}(\rho) \geqslant \vec{x}(\eta)\end{gathered} \tag{1.12}$$

2) Положим $\sigma(\rho) \overset{\circ}{=} \sum\limits_{j=1}^{n}[\vec{x}(\rho)]_j$ при $\rho > \lambda(A)$. Покажем, что

$$\lim_{\rho \to \lambda(A)+0} \sigma(\rho) = +\infty. \tag{1.13}$$

Допустим противное, т. е. $\sigma(\rho) \leqslant \hat{\sigma} < +\infty$. Тогда каждая j-я компонента $[\vec{x}(\rho)]_j \leqslant \hat{\sigma}(j = 1, \ldots, n)$ монотонна и ограничена $\Rightarrow \exists \lim\limits_{\rho \to \lambda(A)+0} \vec{x}(\rho) = \hat{\vec{x}} \geqslant 0$. $\lambda(A)\hat{\vec{x}} - A\hat{\vec{x}} = \vec{\omega} > 0 \Rightarrow (\lambda(A)E - A)$ – продуктивна $\Rightarrow$ т. к. $\lambda(A)\hat{\vec{x}} > A\hat{\vec{x}}$, $\hat{\vec{x}} > 0$, то

$$\exists \varepsilon > 0 \mid (\lambda(A) - \varepsilon) > A\hat{\vec{x}}$$

$\Rightarrow$ $((\lambda(A) - \varepsilon)E - A)$ – продуктивна $\xrightarrow{\text{по теореме 1'}}$ $\exists((\lambda(A) - \varepsilon)E - A)^{-1} \geqslant 0$ – противоречие с определением $\lambda(A)$.

3) Определим векторы $\vec{y}(\rho) \overset{\circ}{=} \frac{1}{\sigma(\rho)}\vec{x}(\rho)$.

Пусть K – стандартный симплекс (он компактен):

$$K = \left\{\vec{y} = (y_1, \ldots, y_n) \geqslant 0, \sum_{j=1}^{n} y_j = 1\right\}$$

Из определения $\vec{y}(\rho)$ и того, что $\vec{y}(\rho) \geqslant 0 \Rightarrow \vec{y}(\rho) \in K$.

Без ограничения общности будем считать, что $\lim\limits_{t \to +\infty} \rho(t) = \lambda(A)$ ($\{\rho(t)\} \searrow \lambda(A)$), а $\lim\limits_{t \to +\infty} \vec{y}(\rho(t)) = \vec{x}_A \in K$.

Из (1.12), в результате деления на $\sigma(\rho)$ при $\rho > \lambda(A)$, имеем:

$$\rho\vec{y}(\rho) - A\vec{y}(\rho) = \frac{1}{\sigma(\rho)}\vec{\omega}.$$

Подставляя $\rho = \rho(t)$ и переходя к пределу при $t \to +\infty$, получаем (с учетом (1.13)):

$$\lambda(A)\vec{x}_A - A\vec{x}_A = 0.$$

В силу того, что $\vec{x}_A \in K$ следует, что $\vec{x}_A \geqslant 0$ и $\sum\limits_{j=1}^{n}[\vec{x}_A]_j = 1 \Rightarrow \vec{x}_A \neq 0$.

Так как матрица $(\rho E - A)$ является невырожденной при любом $\rho \in M(A)$, то никакое ρ не может оказаться собственным значением матрицы A. Сдедовательно, $\lambda(A)$ является наибольшим из всех ее собственных значений. ∎

Теорема 3 (Ф. Г. Фробениус, О. Перрон).

Пусть $A = \|a_{ij}\|_{i,j=\overline{1,n}} \geqslant 0$.

Тогда:

1) среди собственных чисел матрицы A есть хотя бы одно неотрицательное вещественное число, и наибольшему из них – $\lambda(A)$ – соответствует неотрицательный собственный вектор $\vec{x}_A$;

2) матрица $(\rho E - A)$ неотрицательно обратима (т. е. $\exists(\rho E - A)^{-1} \geqslant 0$) тогда и только тогда, когда $\rho > \lambda(A)$;

3) если $\vec{y} \geqslant 0,\ \vec{y} \neq 0,\ A\vec{y} \geqslant \mu\vec{y}$, то $\mu \leqslant \lambda(A)$;

4) если $A\vec{z} = \omega\vec{z}$, где $\vec{z} \in \mathbb{C}^n \backslash \{0\}$ (т. е. ω – собственное число матрицы A, а $\vec{z}$ – её собственный вектор), то $|\omega| \leqslant \lambda(A)$.

Доказательство. *Шаг 1* Из лемм 1 и 2 $\Rightarrow$ 1), 2).

Шаг 2 Докажем 3). $\vec{y} \geqslant 0,\ \vec{y} \neq 0,\ A\vec{y} \geqslant \mu\vec{y}$.

Допустим противное, что $\mu > \lambda(A)$, т. е. $0 \geqslant (\mu E - A)\vec{y}$. Из 2) следует, что $\exists(\mu E - A)^{-1} \geqslant 0$, а $0 \geqslant (\mu E - A)^{-1}(\mu E - A)\vec{y} = \vec{y}$ – противоречие с $\vec{y} \geqslant 0,\ \vec{y} \neq 0$.

Шаг 3 Докажем 4). Возьмём $\vec{z} = (z_1, \ldots, z_n) \neq 0$ и построим вспомогательный вектор $\vec{y} = (|z_1|, \ldots, |z_n|) \geqslant 0,\ \vec{y} \neq 0$.

Тогда $\underbrace{|\omega z_i|}_{=|\omega| y_i} = |\sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij} z_j| \leqslant \sum\limits_{j=1}^{n} |a_{ij} z_j| = \sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij} y_j \Rightarrow$

$\Rightarrow A\vec{y} \geqslant |\omega|\vec{y} \xrightarrow{\text{из 3)(вместо } \mu \leftrightarrow |\omega|)} |\omega| \leqslant \lambda(A)$. ∎

Определение 2. Число $\lambda(A)$ и вектор $\vec{x}_A$, определенные в теореме 3, называются соответсвенно числом (корнем) и вектором Фробениуса-Перрона.

Замечание. *(Содержательная интерпретация числа Фробениуса-Перрона)* Рассмотрим режим сбалансированного роста:

$$\left(\frac{1}{s}E - A\right)\vec{x} = \vec{\omega}$$

$$\vec{x} \geqslant 0,\ \vec{\omega} > 0,$$

где s – темп сбалансированного роста. Условие продуктивности матрицы $(E - A)$ (здесь $\rho = 1$), в силу пункта 2) теоремы 3, эквивалентно условию $1 > \lambda(A) \Rightarrow$ $\Rightarrow \frac{1}{s} > \lambda(A) \Leftrightarrow\ s < \frac{1}{\lambda(A)}$, т. е. $\frac{1}{\lambda(A)}$ – технологический предел для темпа сбалансированного роста в простейшей динамической модели Леонтьева.

Теорема 4 (Свойства чисел Фробениуса-Перрона).
Пусть $A = \|a_{ij}\|_{i,j=\overline{1,n}} \geqslant 0$, *тогда*

1) $\lambda(A^T) = \lambda(A)$*;*

2) если $\alpha > 0$*, то* $\lambda(\alpha A) = \alpha\lambda(A)$*;*

3) $\lambda(A^t) = (\lambda(A))^t,\ t \in \mathbb{N}$*;*

4) если $A \geqslant B \geqslant 0, A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$*, то* $\lambda(A) \geqslant \lambda(B)$*;*

**Если есть две экономические системы (быть может одной страны), то ограничение сбалансированного роста будет больше у той системы, чья продуктивная матрица хуже.*

5) если C *– главная подматрица матрицы* A*, то* $\lambda(A) \geqslant \lambda(C)$*;*

**В силу возможности существования такого процесса как имитация производства, при подсчёте баланса по какой-либо подматрице матрицы из того, что* $\lambda(C) < \rho$ *вовсе не слудует, что* $\lambda(A) < \rho$*.*

6) $\lambda(A) = 0 \ \Leftrightarrow\ A^n = 0$ *для некоторого* $n \in \mathbb{N}$*.*

Доказательство. Свойства 1), 2) – очевидны.

3) по теореме 3 $\exists \vec{x}_A \geqslant 0,\ \vec{x}_A \neq 0 | A\vec{x}_A = \lambda(A)\vec{x}_A$ Допустим по индукции, что для τ верно

$$A^\tau \vec{x}_A = (\lambda(A))^\tau \vec{x}_A.$$

Докажем, что это верно и для $\tau + 1$.

$$A^{\tau+1}\vec{x}_A = (\lambda(A))^\tau A\vec{x}_A = (\lambda(A))^{\tau+1}\vec{x}_A \Rightarrow$$

$$\Rightarrow A^t\vec{x}_A = (\lambda(A))^t\vec{x}_A \Rightarrow$$

$\Rightarrow (\lambda(A))^t$ – собственное число матрицы $A \Rightarrow \lambda(A^t) \geqslant (\lambda(A))^t$.

Докажем, что $\lambda(A^t) = (\lambda(A))^t$. Допустим противное: $\lambda(A^t) > (\lambda(A))^t$.
Положим $\rho = (\lambda(A^t))^{\frac{1}{t}}$.
Тогда $\rho > \lambda(A) \xrightarrow{\text{по теореме 3}} \exists(\rho E - A)^{-1} \geqslant 0 \xrightarrow{\text{по теореме 1'}} \exists \hat{\vec{x}} \geqslant 0 \mid \rho\hat{\vec{x}} > A\hat{\vec{x}} \Rightarrow$
$\Rightarrow$ утверждаем, что $\rho^\tau\hat{\vec{x}} > A^\tau\hat{\vec{x}}$. Докажем это по индукции (пусть верно для τ, проверим для $\tau + 1$). Умножим левую и правую часть на A. Строгое неравенство перейдет в нестрогое:

$$\rho^\tau A\hat{\vec{x}} \geqslant A^{\tau+1}\hat{\vec{x}}.$$

Так как изначальное неравенство было строгим, то $\hat{\vec{x}} > 0,\ \rho > 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow \rho^{\tau+1}\hat{\vec{x}} > \rho^\tau A\hat{\vec{x}} \geqslant A^{\tau+1}\hat{\vec{x}} \Rightarrow$
$\Rightarrow \rho^t\hat{\vec{x}} > A^t\hat{\vec{x}},\ \lambda(A^t)\hat{\vec{x}} > A^t\hat{\vec{x}} \Rightarrow$
$\Rightarrow (\lambda(A^t)E - A^t)$ – продуктивна $\xrightarrow{\text{по условию Хокинса-Саймона}} det(\lambda(A^t)E - A^t) > 0$ – противоречие.

4) $M(A) = \{\rho \mid \exists(\rho E - A)^{-1} \geqslant 0\},\ \lambda(A) = \inf\limits_{\rho\in M(A)} \rho$
$M(B) = \{\rho \mid \exists(\rho E - B)^{-1} \geqslant 0\},\ \lambda(B) = \inf\limits_{\rho\in M(B)} \rho$

Достаточно доказать включение $M(A) \subseteq M(B)$.

Выберем $\forall \rho \in M(A) \xrightarrow{\text{по теореме 1'}} \exists \vec{x} \geqslant 0 \mid \rho\vec{x} > A\vec{x} \geqslant B\vec{x} \Rightarrow$ матрица $(\rho E - B)$ продуктивна по определению $\xrightarrow{\text{по теореме 1'}} \rho \in M(B)$

5) Без ограничения общности будем считать, что

$$A = \begin{pmatrix} C & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} \geqslant \begin{pmatrix} C & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = B \geqslant 0 \;\Rightarrow$$

$\Rightarrow$ из доказанного ранее в 4) следует, что $\lambda(A) \geqslant \lambda(B) = \lambda(C)$.

6) Из $A^n = 0 \Rightarrow \lambda(A^n) = (\lambda(A))^n = 0 \Rightarrow \lambda(A) = 0$.

Для доказательства в обратную сторону, зафиксируем положительный вектор $\vec{x} > 0$ и число $\eta > 0$ такие, что $A\vec{x} \leqslant \eta\vec{x}$. Тогда очевидно, что $0 \leqslant A^{s+1}\vec{x} \leqslant \eta A^s\vec{x}$ $(s = 0, 1, \ldots)$. Введем индексные множества $N_s \overset{\circ}{=} \{i \mid [A^s\vec{x}]_i > 0\}$. Получим:

$$N_0 \supset N_1 \supset \ldots \supset N_s \supset N_{s+1} \supset \ldots \tag{1.14}$$

Покажем, что $N_n = \varnothing$, где n – порядок матрицы A. Если $N_s \neq \varnothing$, то положим $\mu \overset{\circ}{=} \min\limits_{i \in N_s} \frac{[A^{s+1}\vec{x}]_i}{[A^s\vec{x}]_i}$. Число μ удовлетворяет условию $A^{s+1}\vec{x} \geqslant \mu A^s\vec{x},\ A^s\vec{x} \geqslant 0$. Поэтому, в силу пункта 3) теоремы 3, $\mu \leqslant \lambda(A)$. Но $\lambda(A) = 0$, а $0 \leqslant \mu \;\Rightarrow\; \mu = 0$ Это означает, что существует хотя бы один индекс $i \in N_s \mid [A^{s+1}\vec{x}]_i = 0$. Так что если , то в (1.14) N_{s+1} является собственным подмножеством множества N_s. Так как N_0 содержит n элементов, то $N_n = \varnothing$, а потому $A^n\vec{x} = 0$. С учетом условий $A^n \geqslant 0,\ \vec{x} > 0$, заключаем, что $A^n = 0$. ■

Можно ли определить подкласс матриц, где вектор Фробениуса-Перрона определяет луч?

1.4 Неразложимые матрицы.

Определение 3. Будем говорить, что квадратная матрица $A = \|a_{ij}\|_{i,j=\overline{1,n}} \geqslant 0$ является разложимой, если существует собственное подмножество J множества $N = \{1, 2, \ldots, n\}$ номеров строк этой матрицы такое, что $a_{ij} = 0$, если $i \notin J, j \in J$.

Замечание. Если матрица A разложима, то её можно представить в виде

$$E_\pi^T A E_\pi = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{pmatrix}$$

где E_π – матрица перестановок, переводящая множество J в множество $\{1, 2, \ldots, |J|\}$. В таком виде $|J| \times |J|$ матрица A_{11} соответсвует тем отраслям, которые используют только свои ресурсы (продукцию) – т. е. не зависят от поставок ресурсов отраслей, соответсвующих индексному множеству $N \backslash J$. При этом аналогичное рассуждение по отношению к сбыту отраслей из J вовсе не обязано быть верным. Другими словами, из разложимости матрицы A не следует, что $a_{ij} = 0$ для $i \in J,\ j \notin J$. Если же всё-таки $a_{ij} = 0$ для $i \in J,\ j \notin J$ как и для $j \in J,\ i \notin J$, то система полностью распадается на две группы отраслей из J и $N \backslash J$, каждая из которых работает в режиме полного самообеспечения и между которыми полностью отсутсвует какое-либо взаимодействие. В этом случае при преобразовании матрицы A матрица $A_{12} = 0$.

Лемма 3 (Критерий разложимости)**.** *Пусть* $A = \|a_{ij}\|_{i,j=\overline{1,n}} \geqslant 0$. *Для того, чтобы матрица* A *была разложимой, необходимо и достаточно, чтобы существовали полуположительный вектор* $\hat{\vec{x}}$ $(\hat{\vec{x}} \geqslant 0,\ \hat{\vec{x}} \neq 0,\ \hat{\vec{x}} \not> 0)$ *и число* $\mu \geqslant 0, \mu \in \mathbb{R}$ *такие, что* $A\hat{\vec{x}} \leqslant \mu\hat{\vec{x}}$.

Доказательство. *Достаточность.* По предположению $J = \{j \in N \mid [\hat{\vec{x}}]_j > 0\}$ – непустое собственное подмножество N. Из условия $A\hat{\vec{x}} \leqslant \mu\hat{\vec{x}}$ для $i \notin J$, имеем:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}[\hat{\vec{x}}]_j \leqslant 0 \Rightarrow a_{ij}[\hat{\vec{x}}]_j = 0\ \forall i \notin J,\ j \in N \Rightarrow$$

$\Rightarrow a_{ij} = 0$, если $i \notin J,\ j \in J$.

Необходимость. Без ограничения общности будем считать, что

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{pmatrix},$$

где A_{11} и A_{22} – квадратные матрицы.

Так как $A_{11} \geqslant 0 \xrightarrow{\text{по теореме 3}} \exists \vec{x}_1 \geqslant 0,\ \vec{x}_1 \neq 0 \mid A_{11}\vec{x}_1 = \lambda(A)\vec{x}_1$.
Положим $\hat{\vec{x}} \stackrel{\circ}{=} \begin{pmatrix} \vec{x}_1 \\ 0 \end{pmatrix} \geqslant 0,\ \hat{\vec{x}} \neq 0,\ \hat{\vec{x}} \not> 0$ Тогда

$$A\hat{\vec{x}} = \begin{pmatrix} A_{11}\vec{x}_1 + A_{12} \cdot \vec{0} \\ 0 \cdot \vec{x}_1 + A_{22} \cdot \vec{0} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{11}\vec{x}_1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda(A_{11})\vec{x}_1 \\ 0 \end{pmatrix} = \lambda(A_{11})\hat{\vec{x}} = \mu\hat{\vec{x}}.$$

Таким образом, при данных μ и $\hat{\vec{x}}$ условия леммы выполняются в виде равенства.
■

Лемма 4. *Матрица* $A = \|a_{ij}\|_{i,j=\overline{1,n}} \geqslant 0$ *разложима тогда и только тогда, когда разложима матрица* A^T.

Доказательство. Если $a_{ij} = 0$ для $i \notin J,\ j \in J$, где J – непустое собственное подмножество множества индексов N, то, положив $A^{\mathrm{T}} = \|b_{ij}\|$, имеем $b_{ij} = a_{ji} = 0$ при $i \notin N \backslash J,\ j \in N \backslash J$. Поэтому разложимость матрицы A^{T} сразу следует из разложимости матрицы A. По тем же соображениям из разложимости A^{T} следует разложимость матрицы $A = \left(A^{\mathrm{T}}\right)^{\mathrm{T}}$. ■

Определение 3'. Будем говорить, что неотрицательная квадратная матрица $A = \|a_{ij}\|_{i,j=\overline{1,n}} \geqslant 0$ является неразложимой, если она не является разложимой или нулевой матрицей первого порядка.

Теорема 5. *Пусть матрица* $A = \|a_{ij}\|_{i,j=\overline{1,n}} \geqslant 0$ *неразложима. Тогда:*

1) $\lambda(A) > 0$ *и, если* $\vec{x}_A \geqslant 0, \vec{x}_A \neq 0$ *– вектор Фробениуса-Перрона (т. е.* $A\vec{x}_A = \lambda(A)\vec{x}_A$*), то* $\vec{x}_A > 0$*;*

2) если $A\vec{y} = \lambda(A)\vec{y}$ *(*$\vec{y} \in \mathbb{C}^n$*), то* $\exists\theta \mid \vec{y} = \theta\vec{x}_A$ *(т. е. у неразложимой матрицы собственное подпространство, соответсвующее числу* $\lambda(A)$*, одномерно).*

Доказательство. 1) Допустим противное, что $\vec{x}_A$ не является положительным, т. е. $\vec{x}_A$ полуположительный $\xrightarrow{\text{по лемме 3}}$ A – разложима $\Rightarrow$ противоречие. Значит наше допущение неверно, $\vec{x}_A > 0 \;\Rightarrow A\vec{x}_A \neq 0 \;\Rightarrow\; \lambda(A) \neq 0 \;\Rightarrow\; \lambda(A) > 0$.

2) Пусть $A\vec{y} = \lambda(A)\vec{y}$, а $\vec{x}_A$ – вектор Фробениуса-Перрона,
значит $A\vec{x}_A = \lambda(A)\vec{x}_A$. Рассмотрим вектор $\vec{y}(t) \overset{\circ}{=} \vec{y} - t\vec{x}_A$. Для него верно $A\vec{y}(t) = \lambda(A)\vec{y}(t)\ \forall t$. Выберем $\theta \overset{\circ}{=} \min\limits_{1\leqslant j\leqslant n} \dfrac{[\vec{y}]_j}{[\vec{x}_A]_j}$. Тогда $[\vec{y}]_j \geqslant \theta[\vec{x}_A]_j$ $(j = 1, \dots, n) \Rightarrow$ $\Rightarrow\; \vec{y}(\theta) \geqslant 0$. Возможны два варианта:
(1) $\vec{y}(\theta)$ – вектор Фробениуса-Перрона. Но это противоречит 1), т. к. будет по крайней мере одна компонента, равная нулю.
(2) $\vec{y}(\theta) = 0 \;\Rightarrow\; \vec{y} = \theta\vec{x}_A$. ∎

1.5 Устойчивые матрицы.

Пусть $A = \|a_{ij}\|_{i,j=\overline{1,n}} \geqslant 0$ – неразложимая матрица.
Вспомним, что в соответствии с теоремами 2 и 3

$$\lim_{\substack{t\to\infty\\ \rho>0}} \frac{1}{\rho^t}A^t = \begin{cases} 0, & \text{если } \rho > \lambda(A);\\ \nexists, & \text{если } \rho < \lambda(A).\end{cases}$$

Интересен пограничный случай, когда $\rho = \lambda(A)$. Чему будет равен предел $\lim\limits_{t\to\infty}\left(\dfrac{1}{\lambda(A)}A\right)^t = {?}$ Вообще говоря, поведение матрицы $\left(\dfrac{1}{\lambda(A)}A\right)^t$ имеет колебательный характер даже в случае если матрица A неразложима.

Пример. Рассмотрим матрицу $A = \begin{pmatrix} 0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$.
Ее собственные числа $\lambda_{1,2} = \pm 1,\ \lambda(A) = 1$.

$$A^2 = E;\ A^3 = A;\ A^4 = E;\ \dots\ A^{2k} = E;\ A^{2k+1} = A;\ \dots$$

Интересующий нас предел не существует.

Определение 4. Будем говорить, что квадратная матрица $A = \|a_{ij}\|_{i,j=\overline{1,n}}$ является устойчивой, если $\exists k \geqslant 0 \mid A^k > 0$.

Упоминем факт (без доказательства), что матрица A неразложима тогда и только тогда, когда для любой пары индексов (i,j), $i,j \in N = \{1,\ldots,n\}$, существует $t \in \mathbb{N} \mid (a_{ij})^t > 0$.

Теорема 6 (Об устойчивых матрицах). *Пусть $A = \|a_{ij}\|_{i,j=\overline{1,n}}$ – неразложимая матрица.*

1) Тогда для того, чтобы существовал предел

$$\lim_{t\to\infty}\left(\frac{1}{\lambda(A)}A\right)^t = B \tag{1.15}$$

необходимо и достаточно, чтобы матрица A была устойчивой.

2) Если предел в (1.15) существует, то каждый столбец предельной матрицы B является вектором Фробениуса-Перрона матрицы A, а каждая строка является вектором Фробениуса-Перрона матрицы A^T.

Доказательство. Заметим, что $\lambda\left(\frac{1}{\lambda(A)}A\right) = \frac{\lambda(A)}{\lambda(A)} = 1$ (при умножении матрицы на положительное число α число $\lambda(A)$ и спектр матрицы умножаются на α, а собственные вектора (Фробениуса-Перрона) не меняются). Без ограничения общности будем предполагать, что $\lambda(A) = 1$.

Шаг 1 Докажем утверждение 2) теоремы. Запишем два соотношения:

$$A^t \cdot A = A^{t+1}$$

$$A \cdot A^t = A^{t+1}$$

Исходя из того, что предел в (1.15) существует, перейдем к пределу в этих соотношениях.

$$B \cdot A = B \Leftrightarrow A^T B^T = B^T \tag{1.16}$$

$$A \cdot B = B \tag{1.17}$$

Так как предел неотрицательных матриц неотрицателен, то $B \geqslant 0$. Также заметим, что $\lambda(A) = \lambda(A^T) = 1$. В силу соотношения (1.17) имеется следующая альтернатива: каждый столбец матрицы B является или вектором Фробениуса-Перрона матрицы A, или нулевым вектором. Из (1.16) имеем: каждая строка матрицы B является или вектором Фробениуса-Перрона матрицы A^T, или нулевым вектором.

Докажем, что не может быть нулевого столбца (альтернатива из (1.16)). Допустим противное, что у матрицы B есть нулевой столбец. Тогда в каждой строке матрицы B есть нулевой элемент $\Rightarrow$ по теореме 5 (т. к. A^T – неразложима) в матрице B нет столбцов, являющихся векторами Фробениуса-Перрона $\Rightarrow B = 0$. Но тогда, опять же, в силу теоремы 5, $\exists \vec{x}_A > 0 \mid A\vec{x}_A = \vec{x}_A$ (т. к. $\lambda(A) = 1$) $\Rightarrow$

$$A^t \vec{x}_A = \vec{x}_A \tag{1.18}$$

Переходя к пределу в (1.18) при $t \to \infty$, получаем $0 = B\vec{x}_A = \vec{x}_A > 0$ – противоречие. Значит нулевых столбцов в матрице B быть не может, как и не может быть нулевых строк. Доказательство утверждения 2) теоремы завершено.

Теперь докажем утверждение 1) теоремы.

Шаг 2 (необходимость) Из теоремы 5 и из доказанного в шаге 1

$$\exists \lim_{t\to\infty} A^t = B > 0$$

Значит существует $\hat{t} \geqslant 1 \mid \forall t \geqslant \hat{t}\ A^t > 0$. Пусть $k > \hat{t}$. Тогда $A^k > 0$. Необходимость доказана.

Доказательство достаточности разобьём на 2 части.

Шаг 3 (достаточность, частный случай $A > 0$)

Введём $\min\limits_{i,j\in\{1,\ldots,n\}} a_{ij} = \varepsilon > 0$.

Поскольку A – неразложима, то мы можем из n^2-чисел $\dfrac{[\vec{x}_A]_i}{[\vec{x}_A]_j}$ выбрать наименьшее. Оно тоже будет положительным, т. е. $\min\limits_{i,j\in\{1,\ldots,n\}} \dfrac{[\vec{x}_A]_i}{[\vec{x}_A]_j} = \delta > 0$ Рассмотрим линейную динамическую систему

$$\begin{cases} \vec{y}(t+1) = A\vec{y}(t); \\ \vec{y}(t) = A^t\vec{y}(0); \\ \vec{y}(0) \geqslant 0,\ \vec{y}(0) \neq 0. \end{cases} \tag{1.19}$$

Если $\exists \lim\limits_{t\to\infty} A^t$, то $\exists \lim\limits_{t\to\infty} \vec{y}(t)$, равный вектору Фробениуса-Перрона предельной матрицы. Нам надо показать, что это верно и в обратную сторону. Взяв i-й базисный столбец матрицы A в качестве $\vec{y}(t)$, получим i-й базисный столбец матрицы A^t.

Введём $\theta_i(t) \overset{\circ}{=} \dfrac{[\vec{y}(t)]_i}{[\vec{x}_A]_i}$, $(i = \overline{1,n})$. Докажем, что $\theta_i(t) \to \alpha$, где α не зависит от t.

Пусть $\alpha(t) \overset{\circ}{=} \min\limits_{1\leqslant i\leqslant n} \theta_i(t)$. Обозначим компоненту, на которой достигается этот минимум, как $l(t)$ (т. е. $\theta_{l(t)}(t) = \alpha(t)$). Если таких компонент несколько, берем любую из них. Аналогично вводим $\beta(t) \overset{\circ}{=} \max\limits_{1\leqslant i\leqslant n} \theta_i(t)$ и компоненту $s(t)$, такую, на которой достигается максимум, т. е. $\beta(t) = \theta_{s(t)}$. Очевидно, что

$$\alpha(t) \leqslant \theta_i(t) \leqslant \beta(t). \tag{1.20}$$

Из покоординатной записи равенства (1.19) для $i = \overline{1, n}$, имеем:

$$
\begin{aligned}
[\vec{y}(t+1)]_i &= \sum_{j=1}^{n} a_{ij} [\vec{y}(t)]_j = \\
&= \sum_{j=1}^{n} a_{ij} [\vec{x}_A]_j \theta_j(t) = \\
&= a_{is(t)} [\vec{x}_A]_{s(t)} \beta(t) + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq s(t)}}^{n} a_{ij} [\vec{x}_A]_j \theta_j(t) \geqslant
\end{aligned}
$$

в силу (1.20)

$$
\begin{aligned}
&\geqslant a_{is(t)} [\vec{x}_A]_{s(t)} \beta(t) + \alpha(t) \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq s(t)}}^{n} a_{ij} [\vec{x}_A]_j = \\
&= a_{is(t)} [\vec{x}_A]_{s(t)} \left(\beta(t) - \alpha(t)\right) + \alpha(t) \sum_{j=1}^{n} a_{ij} [\vec{x}_A]_j = \\
&= a_{is(t)} [\vec{x}_A]_{s(t)} \left(\beta(t) - \alpha(t)\right) + \alpha(t) [\vec{x}_A]_i.
\end{aligned}
$$

Разделив данное неравенство на $[\vec{x}_A]_i$, имеем:

$$
\begin{aligned}
\theta_j(t+1) \geqslant a_{is(t)} \frac{[\vec{x}_A]_{s(t)}}{[\vec{x}_A]_i} \left(\beta(t) - \alpha(t)\right) + \alpha(t) \geqslant \\
\geqslant \varepsilon\delta \left(\beta(t) - \alpha(t)\right) + \alpha(t).
\end{aligned}
$$

т. к. неравенство выше верно для любого i, возьмём $i = l(t)$. Получим:

$$
\alpha(t+1) \geqslant \varepsilon\delta \left(\beta(t) - \alpha(t)\right) + \alpha(t)
$$

или, что то же самое

$$
\alpha(t+1) - \alpha(t) \geqslant \varepsilon\delta \left(\beta(t) - \alpha(t)\right) \tag{1.21}
$$

Теперь делаем аналогичную процедуру, только выделяя элементы с номерами $l(t)$, а не с $s(t)$):

$$
\begin{aligned}
[\vec{y}(t+1)]_i &= \sum_{j=1}^{n} a_{ij}[\vec{y}(t)]_j = \\
&= \sum_{j=1}^{n} a_{ij}[\vec{x}_A]_j \theta_j(t) = \\
&= a_{il(t)}[\vec{x}_A]_{l(t)}\alpha(t) + \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq l(t)}}^{n} a_{ij}[\vec{x}_A]_j \theta_j(t) \leqslant
\end{aligned}
$$

в силу (1.20)

$$
\begin{aligned}
&\leqslant a_{il(t)}[\vec{x}_A]_{l(t)}\alpha(t) + \beta(t) \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq l(t)}}^{n} a_{ij}[\vec{x}_A]_j = \\
&= a_{il(t)}[\vec{x}_A]_{l(t)}\left(\alpha(t) - \beta(t)\right) + \beta(t) \sum_{j=1}^{n} a_{ij}[\vec{x}_A]_j = \\
&= a_{il(t)}[\vec{x}_A]_{l(t)}\left(\alpha(t) - \beta(t)\right) + \beta(t)[\vec{x}_A]_i.
\end{aligned}
$$

Разделив данное неравенство на $[\vec{x}_A]_i$, имеем:

$$
\begin{aligned}
\theta_j(t+1) &\leqslant a_{il(t)}\frac{[\vec{x}_A]_{l(t)}}{[\vec{x}_A]_i}\left(\alpha(t) - \beta(t)\right) + \beta(t) \leqslant \\
&\leqslant \varepsilon\delta\left(\alpha(t) - \beta(t)\right) + \beta(t).
\end{aligned}
$$

опять же, т. к. неравенство выше верно для любого i, возьмём $i = s(t)$. Получим:

$$
\beta(t+1) \leqslant \varepsilon\delta\left(\alpha(t) - \beta(t)\right) + \beta(t)
$$

или, что то же самое

$$
\beta(t) - \beta(t+1) \geqslant \varepsilon\delta\left(\beta(t) - \alpha(t)\right) \tag{1.22}
$$

Далее, из (1.21) и (1.22), в силу того, что $\varepsilon > 0$, $\delta > 0$ и $\beta(t) - \alpha(t) \geqslant 0$, последовательности $\{\alpha(t)\} \nearrow, \{\beta(t)\} \searrow$ – монотонно неубывающая и невозрастающая соответственно.

Покажем, что $\beta(t) \geqslant \alpha(\tau)\ \forall t, \tau$:

(1) для $t = \tau$ это следует из (1.20);

(2) для $t > \tau$ это следует из $\beta(t) \underbrace{\geqslant}_{\text{из } (1)} \alpha(t) \underbrace{\geqslant}_{\text{из-за } \{\alpha(t)\}\nearrow} \alpha(\tau)$

(3) для $t < \tau$ это следует из $\beta(t) \underbrace{\geqslant}_{\text{из-за } \{\beta(t)\}\searrow} \beta(\tau) \underbrace{\geqslant}_{\text{из } (1)} \alpha(\tau)$

Поскольку монотонная ограниченная последовательность имеет предел, получаем, что:

$$\exists \lim_{t\to\infty} \alpha(t) = \alpha,\ \exists \lim_{t\to\infty} \beta(t) = \beta$$

Теперь заметим, что

$$0 \leqslant \beta(t) - \alpha(t) \leqslant \frac{1}{\varepsilon\delta}(\alpha(t+1) - \alpha(t))$$

следовательно, по лемме «о двух милиционерах»,

$$\lim_{t\to\infty}(\beta(t) - \alpha(t)) = 0 \Rightarrow \alpha = \beta.$$

Тогда, из (1.20), имеем:

$$\lim_{t\to\infty} \theta_i(t) = \alpha\ (i = \overline{1,n}).$$

Значит $\exists \lim\limits_{t\to\infty} \vec{y}(t) = \alpha\vec{x}_A$.

Шаг 4 (достаточность, общий случай $A^k > 0$

Представим t в виде $t = k\cdot\tau(t) + r(t)$, где $r(t) = 0, \overline{1, k-1}$, а $\lim\limits_{t\to\infty} \tau(t) = +\infty$.

Тогда $A^t = A^{r(t)} \cdot \left(A^k\right)^{\tau(t)}$, причем

$$\exists \lim_{t\to\infty} \left(A^k\right)^{\tau(t)} = B. \tag{1.23}$$

В силу *шагов 1 – 3* каждый столбец матрицы B является вектором Фробениуса-Перрона матрицы A^k. Покажем, что векторы Фробениуса-Перрона матриц A^k и A совпадают. Напомним, что $\lambda(A^k) = (\lambda(A))^k = 1$. По теореме 5 $A\vec{x}_A = \vec{x}_A,\ \vec{x}_A > 0$, а т. к. $A^k\vec{x}_A = \vec{x}_A$, то $\vec{x}_A$ – вектор Фробениуса-Перрона матриц A и A^k.

Заметим, что из $A\cdot B = B$ следует, что $A^{r(t)}\cdot B = B$, где $A^{r(t)} = \overline{E, A^{k-1}}$. Перепишем (1.23) в удобном виде:

$$\left(A^k\right)^{\tau(t)} = B + R(t),\ \lim_{t\to\infty} R(t) = 0$$

Это означает, что

$$\lim_{t\to\infty} A^t = \lim_{t\to\infty} A^{r(t)}(B + R(t)) = B + \lim_{t\to\infty} A^{r(t)} R(t) = B$$

■

Определение 5. Пусть квадратная матрица $A = \|a_{ij}\|_{i,j=\overline{1,n}} \geqslant 0$ неразложима. Будем говорить, что A допускает циклическое разложение (импримитивна), если существуют непустые множества $G_0, G_1, \ldots, G_{s-1} (s \geqslant 1)$, такие, что:

1) $G_k \cap G_m = \varnothing$ при $k \neq m, 0 \leqslant k, m \leqslant s-1$;
2) $\bigcup\limits_{k=0}^{s-1} G_k = N = \{1, 2, \dots, n\}$;
3) если $a_{ij} > 0$ и $j \in G_k$, то $i \in G_{k+1 \pmod s}$.

Импримитивная матрица A преобразовывается в матрицу с ненулевой побочной диагональю:

$$E_\pi A E_\pi^T = \begin{array}{c c} & \begin{matrix} G_0 & G_1 & \dots & G_{s-3} & G_{s-2} & G_{s-1} \end{matrix} \\ \begin{matrix} G_0 \\ \hline G_1 \\ \hline G_2 \\ \hline \dots \\ \hline G_{s-2} \\ \hline G_{s-1} \end{matrix} & \left(\begin{array}{c|c|c|c|c|c} 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & * \\ \hline * & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & * & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \hline \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \hline 0 & 0 & \dots & * & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & \dots & 0 & * & 0 \end{array}\right) \end{array}$$

Теорема 7. *Пусть квадратная матрица $A = \|a_{ij}\|_{i,j=\overline{1,n}} \geqslant 0$ неразложима. Тогда следующие утверждения эквивалентны:*
1) A – устойчивая матрица;
2) A не допускает циклических разложений (примитивная);
3) для $i = \overline{1,n}$ Н.О.Д.$\{t \in \mathbb{N} \mid [A^t]_{i,i} > 0\} = 1$;
4) если $A\vec{z} = \omega\vec{z}$, $\vec{z} \neq 0$, $|\omega| = \lambda(A)$, то $\omega = \lambda(A)$.

Данная теорема приведена для указания ещё одной важной интерпретации устойчивой матрицы – вероятностной. Пусть дискретная марковская цепь может находиться в одном из $\{1, \dots, n\}$ состояний. Тогда вероятность нахождения дискретной случайной величины $X(t)$ в i-м состоянии равна

$$Pr\{X(t) = i\} = p_i(t).$$

Условная вероятность перехода из состояния i в состояние j есть

$$Pr\{X(t+1) = j \mid X(t) = i\} = a_{ij} \geqslant 0,$$

(если эта вероятность не зависит от t, то цепь объявляется однородной). Таким образом, A – неотрицательная матрица переходных вероятностей. Причем, из определения a_{ij} следует, что $\sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij} = 1$. Как посчитать распределение вероятности в момент времени $t+1$, если известно её распределение в предыдущий момент t? По формуле полной вероятности, имеем:

$$p_i(t+1) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} p_j(t),$$

или, если записать последнее равенство в векторном виде:

$$\vec{p}(t+1) = A\vec{p}(t)$$

К чему же стремится $\vec{p}(t)$ при $t \to \infty$? Наша теорема утверждает, что при условии примитивности матрицы A

$$\lim_{t\to\infty} \vec{p}(t) = \vec{p^*},$$

где вектор $\vec{p^*}$ суть финальное распределение вероятности, которое находится из условия

$$\vec{p^*} = A\vec{p^*}$$

(т. е. $\vec{p^*}$ является вектором Фробениуса-Перрона матрицы A).

Упражнение. Пусть A – неотрицательная матрица переходных вероятностей и $\sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij} = 1$. Покажите, что тогда $\lambda(A) = 1$.

1.6 Идемпотентные аналоги теорем о неотрицаельных матрицах и их приложения.

В экономике высокоразвитых стран большое значение приобретает информационная индустрия, связанная с производством и использованием знаний и информации, имеющих экономическую ценность. Главная особенность информационных товаров — их сохранение в процессе использования. Будучи произведенными, они не исчезают в процессе потребления. Информация — есть пример несбалансированного товарооборота. Она является общественным благом, наряду, например, с инфраструктурой (в этом случае говорят, что одним и тем же ресурсом могут пользоваться несколько потребителей). Балансы по таким товарам описываются в терминах идемпотентной алгебры, поэтому соответствующий математический аппарат естественно сопоставлять с результатами теории неотрицательных матриц, лежащими в основе метода межотраслевого баланса Леонтьева. Идемпотентный анализ позволяет изучать математические структуры, в которых вместо обычных операций на множестве вещественных чисел действуют идемпотентные операции $\oplus$ и $\odot$. Нам будет важен случай, когда идемпотентным сложением вещественных чисел a и b является операция $a \oplus b = \max\{a, b\}$, а идемпотентное умножение совпадает с обычным умножением. Введенные так операции коммутативны, ассоциативны, и выполняется закон дистрибутивности:

$$(a \oplus b) \odot c = (a \odot c) \oplus (b \odot c).$$

Нам будут интересны мотивировки использования идемпотентных аналогов.

1.6.1 Модель Канторовича-Макарова баланса знаний.

Модель предложена для анализа реализуемости крупных междисциплинарных научно-исследовательских проектов, опыт выполнения которых существовал в 60-е годы XX в. В США и СССР были успешно осуществлены ракетный и ядерный проекты. В США был успешно выполнен проект "Аполлон" высадки человека на Луну, в то время как аналогичный российский проект оказался незавершенным. Эти проекты требовали участия в процессе научных исследований учёных из разных областей наук. Достижения одних являлись заделами для других. К примеру, развитие летательной техники потребовало создания новой автоматизированной технологии проектирования, в рамках которой требовалось организовать эффективное взаимодействие специалистов различных профилей. В модели Канторовича–Макарова предлагалось использовать для анализа реализуемости междисциплинарного исследовательского проекта опыт планирования взаимодействия между различными отраслями экономики с учетом специфики информационной продукции (научных знаний), производимой научно-исследовательскими проектами. Описание межотраслевого взаимодействия разработано в моделях Леонтьева, а необходимым математическим аппаратом является теория неотрицательных матриц. В отличие от обычных товаров, один и тот же информационный продукт может потребляться многократно различными пользователями.

Выделим в анализируемом проекте n используемых в нём видов научно-исследовательской деятельности. Будем описывать степень выполнения проекта с помощью вектора достижений в соответсвующей области $\vec{x} = (x_1, \ldots, x_n) > 0$, где x_j измеряется, например, количеством денег, эффективно потраченных на j-й вид деятельности. Будем предполагать, что исследования по различным направлениям взаимосвязаны и что расходы в объеме x_j по j-му виду деятельности эффективны при условии их согласованности с эффективными расходами по другим видам научно-исследовательской деятельности, а именно если

$$a_{ij} x_j \leqslant x_i \ (i, j = \overline{1, n}) \tag{1.24}$$

Здесь коэффициенты $a_{ij} \geqslant 0$ отражают зависимость эффективного продвижения по j-му направлению исследований от продвижения по i-му направлению. Составленная из этих коэффициентов квадратная матрица $A = \|a_{ij}\|_{i,j=\overline{1,n}}$ описывает связи между выделенными направлениями исследований. Поскольку неравенства

(1.24) должны выполняться для всех $j = \overline{1, n}$, получаем, что

$$\max_{1 \leqslant j \leqslant n} a_{ij} x_j \leqslant x_i \ (i = \overline{1, n}) \tag{1.25}$$

Неравенство (1.25) записывается как $A^{\oplus} \vec{x} \leqslant \vec{x}$, где в векторной операции умножения матрицы A на вектор $\vec{x}$ обычное суммирование заменяется идемпотентным суммированием $\oplus$.

Определение 6. Будем говорить, что матрица $A = \|a_{ij}\|_{i,j=\overline{1,n}} > 0$ является продуктивной в идемпотентном смысле, если существует вектор $\vec{x} = (x_1, \dots, x_n) > 0$ такой, что выполняются неравенства (1.25).

Вопрос о реализуемости междисциплинарного научного проекта с выделенными направлениями исследований, связи между которыми задаются матрицей $A = \|a_{ij}\|_{i,j=\overline{1,n}}$, сводится к проверке ее продуктивности в идемпотентном смысле.

1.6.2 Арбитражные цепочки на валютных рынках.

Другим примером информации в экономике являются различные виды цен – например, обменные курсы валют.

Рассмотрим рынок, на котором осуществляются обмены n видов валют. Обозначим через a_{ij} количество валюты j-го вида, которое можно получить при обмене за единицу валюты i-го вида. Матрица $A = \|a_{ij}\|_{i,j=\overline{1,n}} > 0$ называется матрицей кросс-курсов и описывает состояние валютного рынка. Рассмотрим цепочку обменов $(i_1, i_2, \dots, i_k)$, при которой единица валюты i_1 обменивается на валюту i_2, затем все вырученные при обмене средства обмениваются на валюту i_3, и т.д.; наконец, все вырученные при обмене средства в валюте i_k обмениваются на валюту i_1. В результате всех проведенных обменов получается количество денег в валюте i_1, равное $a_{i_1 i_2} \cdot a_{i_2 i_3} \cdot \ldots \cdot a_{i_{k-1} i_k} \cdot a_{i_k i_1}$.

Определение 7. Будем говорить, что матрица кросс-курсов $A = \|a_{ij}\|_{i,j=\overline{1,n}}$ допускает арбитражную цепочку $(i_1, i_2, \dots, i_k)$, $(k \geqslant 2,\ k \in N = \{1, 2, \dots, n\})$, если $a_{i_1 i_2} \cdot a_{i_2 i_3} \cdot \ldots \cdot a_{i_{k-1} i_k} \cdot a_{i_k i_1} > 1$.

Отметим, что если на валютном рынке котируется несколько десятков валют, проверка отсутствия арбитражных цепочек прямым перебором (важен порядок) является сложной вычислительной задачей, так как общее число цепочек равно

$$\sum_{j=2}^{n} C_n^k k!$$

Тем не менее, как будет видно из дальнейшего, существует алгоритм полиномиальной сложности, позволяющий проверить отсутствие арбитражных цепочек.

Если арбитражные цепочки существуют, то реализация арбитражной цепочки приносит прибыль, при этом консолидированная банковская система несет финансовые потери. Как банки борятся со спекулянтами? Они взимают комиссию в размере $\frac{a_{ij}}{1+r}$, т. е. нужно найти такое минимальное значение величины r, что для любого натурального числа k и любой цепочки обменов $(i_1, i_2, \ldots, i_k)$ справедливо неравенство

$$a_{i_1 i_2} \cdot a_{i_2 i_3} \cdot \ldots \cdot a_{i_{k-1} i_k} \cdot a_{i_k i_1} \leqslant (1+r)^k$$

Если неравенства выполняются при $r \leqslant 0$, то арбитражные цепочки отсутствуют. Если неравенства выполняются при $r > 0$, то уменьшение выплачиваемой суммы в $r+1$ раз подавляет все арбитражные цепочки.

В начале 2000-х годов в ведущих европейских странах происходил процесс объединения денежных систем. Национальные валюты отдельных стран заменялись общей валютной "евро". В течение нескольких лет расчеты производились в национальной валюте и в евро, хотя денежные купюры евро еще не существовали и платежи осуществлялись в национальных валютах. Почему процесс объединения денежных систем растянулся на несколько лет? Каким требованиям должны удовлетворять курсы объединяемых национальных валют по отношению к евро, чтобы объединение национальных денежных систем не порождало спекулятивных потерь? Обозначим через x_i обменный курс i-й национальной валюты на евро. Для этого чтобы при платежах не возникали спекулятивные потери, необходимо, чтобы обмен единицы i-й национальной валюты на j-ю валюту с последующим переводом в евро не давал выигрыша по сравнению с непосредственным переводом единицы i-й валюты в евро, т. е. вектор обменных курсов $\vec{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ должен быть положительным решением системы линейных неравенств:

$$a_{ij} x_j \leqslant x_i, \; i, j = \overline{1, n} \; \Leftrightarrow \; \max_{1 \leqslant j \leqslant n} a_{ij} x_j \leqslant x_i \; (i = 1, \ldots, n)$$

Для того чтобы такие обменные курсы на евро существовали, необходимо и достаточно, чтобы матрица кросс-курсов $A = \|a_{ij}\|_{i,j=\overline{1,n}}$ была продуктивна в идемпотентном смысле. Следующая ниже теорема Африата–Вериана показывает, что существование таких обменных курсов $\vec{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ связано с отсутствием у матрицы кросс-курсов арбитражных цепочек.

Теорема 8 (Африат-Вериан). *Пусть* $A = \|a_{ij}\|_{i,j=\overline{1,n}} > 0$. *Тогда следующие утверждения эквивалентны:*

1) A продуктивна в идемпотентном смысле, т. е. $\exists \vec{x} = (x_1, \ldots, x_n) > 0$ такой, что

$$a_{ij} x_j \leqslant x_i, \; (i, j = \overline{1, n}) \tag{1.26}$$

2) для любой цепочки обменов $(i_1, \ldots, i_k)$,
где $k \geqslant 2, \; i_1, \ldots, i_k \in N = \{1, \ldots, n\}$, справедливо, что

$$a_{i_1 i_2} \cdot a_{i_2 i_3} \cdot \ldots \cdot a_{i_{k-1} i_k} \cdot a_{i_k i_1} \leqslant 1 \tag{1.27}$$

Доказательство. Покажем, что из 1) $\Rightarrow$ 2).

$$\left.\begin{array}{c} a_{i_1i_2}x_{i_2} \leqslant x_{i_1} \\ a_{i_2i_3}x_{i_3} \leqslant x_{i_2} \\ \dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{i_{k-1}i_k}x_{i_k} \leqslant x_{i_{k-1}} \\ a_{i_ki_1}x_{i_1} \leqslant x_{i_k} \end{array}\right| \Rightarrow (a_{i_1i_2} \cdot a_{i_2i_3} \cdot \ldots \cdot a_{i_{k-1}i_k} \cdot a_{i_ki_1}) \cdot \prod_{j=1}^{k} x_{ij} \leqslant \prod_{j=1}^{k} x_{ij} \;\Rightarrow\; (1.27)$$

Теперь покажем, что из 2) $\Rightarrow$ 1). Введём вспомогательные числа

$$\hat{a}_{ij} = \sup_{k\geqslant 0,(i_1,\ldots,i_k)} \{a_{ii_1} \cdot a_{i_1i_2} \cdot \ldots \cdot a_{i_{k-1}i_k} \cdot a_{i_kj}\} \text{ (если } k = 0, \text{ то } \hat{a}_{ij} = a_{ij}),$$

обозначающие наилучший результат, который можно получить при обмене i-й валюты на j-ю, используя всевозможные обмены. Если бы существовала арбитражная цепочка, то $\hat{a}_{ij} = +\infty$ (в силу того, что $a_{ii_1} \cdot (a_{i_1i_2} \cdot \ldots \cdot a_{i_{k-1}i_k})^t \cdot a_{i_kj} \to +\infty$ при $t \to +\infty$).

Пусть теперь нет арбитражной цепочки. Положим $x_i = \max\limits_j a_{ij}$. Нетрудно видеть, что $x_i > 0$ и что для $\forall i, j = \overline{1,n}$ выполнено:

$$x_i = \sup_{k\geqslant 1,(i_1,\ldots,i_k)} \{a_{ii_1} \cdot a_{i_1i_2} \cdot \ldots \cdot a_{i_{k-1}i_k}\} \geqslant$$

(фиксируем i_1 и положим $i_1 = j$, тогда супремум берется на подмножестве)

$$\geqslant \sup_{k\geqslant 2,(i_2,\ldots,i_k)} \{a_{ij} \cdot a_{ji_2} \cdot \ldots \cdot a_{i_{k-1}i_k}\} = a_{ij}x_j$$

■

Доказательство теоремы Африата-Вериана основано на идемпотентном аналоге теоремы о разложении резольвенты в ряд Неймана, известном в теории графов как *алгоритм Варшалла-Флойда.* Опишем алгоритм Варшалла-Флойда. Рассмотрим идемпотентное полукольцо с операциями $a \oplus b = \max\{a, b\}$ и $a \odot b = a \cdot b$. Тогда

$$\hat{A} = \|\hat{a}_{ij}\|_{i,j=\overline{1,n}} = A \oplus A^{\oplus 2} \oplus \ldots \oplus A^{\oplus k} \oplus \ldots$$

где $A^{\oplus k}$ означает возведение матрицы в степень k в идемпотентном смысле (т. е. все операции суммирования заменяются операцией $\oplus$ взятия максимума). Если на каком-то шаге вычисления идемпотентных степеней выясняется, что диагональный элемент больше 1, то все элементы матрицы $\hat{A}$ равны $+\infty$. В противном случае для вычисления ряда достаточно ограничиться первыми n слагаемыми, и, таким образом, алгоритм вычисления $\hat{A}$ имеет сложность порядка n^3.

Сама же теорема 8 является идемпотентным аналогом теоремы 2 текущей главы ($r + 1$ – идемпотентный аналог числа Фробениуса-Перрона).

1.6.3 Экономические индексы.

Индексы цен и спроса являются обобщенными характеристиками, позволяющими судить о тенденциях эволюции экономики. Исходной информацией для их построения является торговая статистика, представляющая собой набор цен и объемов покупок в различные периоды времени.

Будем придерживаться традиционного подхода к построению индексов, опирающегося на оценку стоимости корзины.

Пусть $1, \ldots, m$ – виды товаров;

$\vec{P} = (P_1, \ldots, P_m)$ – вектор цен на них;

$\vec{X} = (X_1, \ldots, X_m)$ – объемы скупаемых товаров (вектор объёмов спроса);

t – текущий период времени;

τ – базовый период времени.

Что брать в качестве потребительской корзины $\vec{\omega}$? Стоимость корзины есть скалярное произведение $\langle \vec{P}, \vec{\omega} \rangle$. Если выбирать в качестве корзины набор товаров, купленный в базовый период, $\vec{X}(\tau)$, то отношение

$$L_{\text{ц}}(t) = \frac{\langle \vec{P}(t), \vec{X}(\tau) \rangle}{\langle \vec{P}(\tau), \vec{X}(\tau) \rangle}$$

называют индексом цен Ласпейроса. Статистические службы чаще всего вычисляют этот индекс.

Если же в качестве корзины выбирать набор товаров, купленный в текущий период, получим индекс цен Пааше:

$$P_{\text{ц}}(t) = \frac{\langle \vec{P}(t), \vec{X}(t) \rangle}{\langle \vec{P}(\tau), \vec{X}(t) \rangle}.$$

Вычисления значений индексов, поазывают, что оказывается $L_{\text{ц}}(t) \geqslant P_{\text{ц}}(t)$. Такое систематическое различие между этими индексами носит название *эффекта Гершенкрона.* Этот эффект замещения относительно подорожавших товаров подешевевшими интуитивно понятен: чем дешевле товар, тем в больших объемах его берет потребитель.

Аналогично можно ввести индексы спроса (объемов) Ласпейроса

$$L_{\text{о}}(t) = \frac{\langle \vec{P}(\tau), \vec{X}(t) \rangle}{\langle \vec{P}(\tau), \vec{X}(\tau) \rangle}$$

и Пааше

$$P_{\text{о}}(t) = \frac{\langle \vec{P}(t), \vec{X}(t) \rangle}{\langle \vec{P}(t), \vec{X}(\tau) \rangle}.$$

Для них тоже будет верен эффект Гершенкрона $L_{\text{о}}(t) \geqslant P_{\text{о}}(t)$.

Но как учесть изменение потребительской корзины при изменении цен? Конюс предложил использовать паретовскую теорию потребительского спроса. Она основана на концепции рационального репрезентативного потребителя, который в силу априори неизвестных фактов выбирает в зависимости от бюджетного ограничения наилучший потребительский набор.

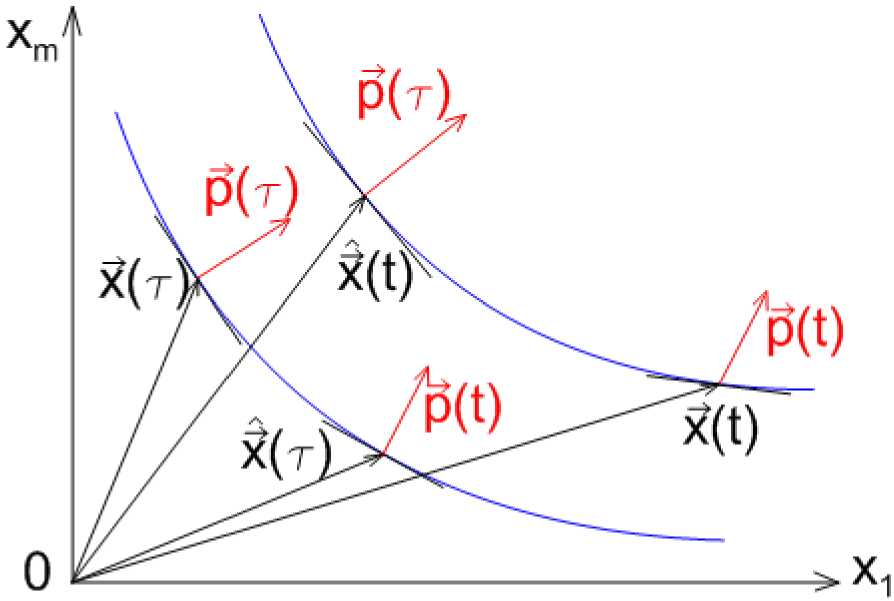


Рис. 1.1: Поверхности безразличия

Вводится функция полезности $F(\vec{X})$ (также называемая *индексом Конюса потребления*), ставящая в соответствие потребительскому набору число. Обозначим через $\hat{\vec{X}}(t)$ набор товаров, который мог быть куплен в момент времени t по цене $\vec{P}(\tau)$, имеюший полезность $F(\vec{X}(t))$; через $\hat{\vec{X}}(\tau)$ набор товаров, который мог быть куплен в момент времени τ по цене $\vec{P}(t)$, имеющий полезность $F(\vec{X}(\tau))$. Тогда отношение

$$\frac{\langle \vec{P}(t), \hat{\vec{X}}(\tau) \rangle}{\langle \vec{P}(\tau), \vec{X}(\tau) \rangle}$$

называют индексом *Конюса-Ласпейроса*, а

$$\frac{\langle \vec{P}(t), \vec{X}(t) \rangle}{\langle \vec{P}(\tau), \hat{\vec{X}}(t) \rangle}$$

— индексом *Конюса-Пааше.*

В экономической теории принято описывать потребительское поведение с помощью функций спроса $\vec{X}(\vec{P})$, определяющих зависимость объемов покупок потребителей от цен, или обратных функций спроса $\vec{P}(\vec{X})$ (при этом $\vec{X}\left(\vec{P}(\vec{X})\right) = \vec{X}$).

Поставим задачу о рациональности поведения потребителей. Она имеет непосредственное значение в вычислении экономических индексов. Ведь, если функции потребительского спроса и функции полезности удовлетворяют гипотезе о рациональности, существует непараметрический метод, позволяющий вычислить индексы потребитльских цен, и, как следствие, прогнозировать структуру потребительского спроса.

Определение 8. Будем говорить, что функция $F(\vec{X})$, определенная на неотрицательном ортанте $\mathbb{R}^m_+$ принадлежит классу Φ, если

1) $\forall \lambda > 0,\ \vec{X} \in \mathbb{R}^m_+$ выполнено $F(\lambda\vec{X}) = \lambda F(\vec{X})$;

2) функция $F(\vec{X})$ вогнута на $\mathbb{R}^m_+$, т. е. $\forall \vec{X}^{(1)} \in \mathbb{R}^m_+,\ \vec{X}^{(2)} \in \mathbb{R}^m_+$ выполнено $F(\vec{X}^{(1)} + \vec{X}^{(2)}) \geqslant F(\vec{X}^{(1)}) + F(\vec{X}^{(2)})$;

* Вогнутость обуславливается существованием взаимодополняющих товаров — например, левые и правые ботинки по отдельности не имеют ценности.

3) $F(\vec{X}) \in \mathbb{C}(\mathbb{R}^m_+)$;

4) $F(\vec{X}) \geqslant 0$ при всех $\vec{X} \in \mathbb{R}^m_+$, причем существует $\tilde{\tilde{\vec{X}}} \geqslant 0$ такой, что $F(\tilde{\tilde{\vec{X}}}) > 0$.

Стоит заметить, что функции из так определенного класса Φ являются и монотонными: для $\vec{X} \geqslant \vec{Y} \geqslant 0 \Rightarrow F(\vec{X}) \geqslant F(\vec{Y})$. Действительно, согласно пунктам 2) и 4) определения, имеем $F(\vec{X}) = F\left(\vec{Y} + (\vec{X} - \vec{Y})\right) \geqslant F(\vec{Y}) + F(\vec{X} - \vec{Y}) \geqslant F(\vec{Y})$.

Определение 9. Будем говорить, что обратные функции спроса $\vec{P}(\vec{X})$ рационализируемы в классе функций полезности Φ, если существует такая функция $F(\vec{X}) \in \Phi$, что $\forall \vec{X} \in \mathbb{R}^m_+$ справедливо

$$\vec{X} \in Arg\max\{F(\vec{Y}) \mid \langle \vec{P}(\vec{X}), \vec{Y}\rangle \leqslant \langle \vec{P}(\vec{X}), \vec{X}\rangle,\ \vec{Y} \in \mathbb{R}^m_+\}.$$

Будем при этом говорить, что функция полезности $F(\vec{X})$ рационализирует обратные функции спроса $\vec{P}(\vec{X})$.

Лемма 5. *Пусть* $F(\vec{X}) \in \Phi,\ \vec{X}^\circ \in \mathbb{R}^m_+,\ \vec{P} \in \partial F(\vec{X}^\circ)$. *Тогда* $\langle \vec{P}, \vec{X}^\circ\rangle = F(\vec{X}^\circ)$.

Замечание. Напомним, что по определению супердифференциала, $\vec{P} \in \partial F(\vec{X}^\circ) \Leftrightarrow \forall \vec{X} \in \mathbb{R}^m_+$ выполнено $F(\vec{X}) - F(\vec{X}^\circ) \leqslant \langle \vec{P}, \vec{X} - \vec{X}^\circ\rangle$.

Также стоит отметить, что лемма 5 является обобщением *тождества Эйлера*: гладкую положительно однородную функцию в $\mathbb{R}^m$ можно представить в виде $F(\vec{X}) = \sum\limits_{j=1}^{m} \dfrac{\partial F(\vec{X})}{\partial X_j} X_j$.

Доказательство. Мы можем брать любые точки $\vec{X} \in \mathbb{R}^m_+$. Возьмем точки луча с началом в $\vec{X}^\circ$. Тогда

$$F(\lambda\vec{X}^\circ) - F(\vec{X}^\circ) \leqslant \langle \vec{P}, \lambda\vec{X}^\circ - \vec{X}^\circ\rangle.$$

В силу пункта 1) определения 8

$$(\lambda - 1)F(\vec{X}^\circ) \leqslant (\lambda - 1)\langle \vec{P}, \vec{X}^\circ \rangle.$$

При $\lambda > 1$ $F(\vec{X}^\circ) \leqslant \langle \vec{P}, \vec{X}^\circ \rangle$, при $\lambda < 1$ $F(\vec{X}^\circ) \geqslant \langle \vec{P}, \vec{X}^\circ \rangle \ \Rightarrow \ F(\vec{X}^\circ) = \langle \vec{P}, \vec{X}^\circ \rangle$ ■

Преобразованием Янга называется

$$Q(\vec{P}) = \inf\left\{ \frac{\langle \vec{P}, \vec{X} \rangle}{F(\vec{X})} \;\middle|\; \vec{X} \in \mathbb{R}^m_+,\ F(\vec{X}) > 0 \right\}.$$

Функцию $Q(\vec{P})$ еще называют *индексом цен.*

Лемма 6 (Мультипликативный аналог теоремы Фенхеля-Моро).
Пусть $F(\vec{X}) \in \Phi$. Тогда
1) $Q(\vec{P}) \in \Phi$;
2) $F(\vec{X}) = \inf\left\{ \frac{\langle \vec{P}, \vec{X} \rangle}{Q(\vec{P})} \;\middle|\; \vec{P} \in \mathbb{R}^m_+,\ Q(\vec{P}) > 0 \right\}$.

Доказательство. *Шаг 1.* Докажем, что $Q(\vec{P}) \in \Phi$. Для этого проверим выполнимость условий определения 8.

1)

$$\begin{aligned} Q(\lambda\vec{P}) &= \inf\left\{ \frac{\langle \lambda\vec{P}, \vec{X} \rangle}{F(\vec{X})} \;\middle|\; \vec{X} \in \mathbb{R}^m_+,\ F(\vec{X}) > 0 \right\} = \\ &= \lambda \inf\left\{ \frac{\langle \vec{P}, \vec{X} \rangle}{F(\vec{X})} \;\middle|\; \vec{X} \in \mathbb{R}^m_+,\ F(\vec{X}) > 0 \right\}, \end{aligned}$$

следовательно, положительно однородна.

2) $\forall \vec{P}^{(1)} \in \mathbb{R}^m_+,\ \vec{P}^{(2)} \in \mathbb{R}^m_+$

$$\begin{aligned} Q(\vec{P}^{(1)} + \vec{P}^{(2)}) &= \inf\left\{ \frac{\langle \vec{P}^{(1)} + \vec{P}^{(2)}, \vec{X} \rangle}{F(\vec{X})} \;\middle|\; \vec{X} \in \mathbb{R}^m_+,\ F(\vec{X}) > 0 \right\} = \\ &= \inf\left\{ \frac{\langle \vec{P}^{(1)}, \vec{X} \rangle}{F(\vec{X})} + \frac{\langle \vec{P}^{(2)}, \vec{X} \rangle}{F(\vec{X})} \;\middle|\; \vec{X} \in \mathbb{R}^m_+,\ F(\vec{X}) > 0 \right\} \geqslant \\ &\geqslant \inf\left\{ \frac{\langle \vec{P}^{(1)}, \vec{X} \rangle}{F(\vec{X})} \;\middle|\; \vec{X} \in \mathbb{R}^m_+,\ F(\vec{X}) > 0 \right\} + \\ &+ \inf\left\{ \frac{\langle \vec{P}^{(2)}, \vec{X} \rangle}{F(\vec{X})} \;\middle|\; \vec{X} \in \mathbb{R}^m_+,\ F(\vec{X}) > 0 \right\} = \\ &= Q(\vec{P}^{(1)}) + Q(\vec{P}^{(2)}) \Rightarrow \end{aligned}$$

$\Rightarrow Q(\vec{P})$ вогнута на $\mathbb{R}^m_+$.

4) Очевидно, что $Q(\vec{P}) \geqslant 0\ \forall \vec{P} \in \mathbb{R}^m_+$. Покажем, что $\exists \tilde{\vec{P}}$ такой, что $Q(\tilde{\vec{P}}) > 0$.

Рассмотрим множество $\Gamma = \{(\vec{X}, t) \mid \vec{X} \in \mathbb{R}^m_+,\ t \leqslant F(\vec{X})\}$. Легко видеть, что Γ — выпуклый замкнутый конус.

Из выпуклости и замкнутости Γ следует, что для произвольной его граничной точки $(\vec{X}^\circ, F(\vec{X}^\circ)) \in \partial\Gamma$ существует опорная гиперплоскость.

А поскольку Γ является конусом, то эта опорная гиперплоскость должна проходить через точку 0.

Итак, $\exists (\vec{P}, \beta) \neq 0 \mid \langle \vec{P}, \vec{X} \rangle + \beta t \geqslant 0\ \forall (\vec{X}, t) \in \Gamma$, причем $\langle \vec{P}, \vec{X}^\circ \rangle + \beta F(\vec{X}^\circ) = 0$.

Так как опорная гиперплокость существует для любой произвольной граничной точки Γ, возьмем $\vec{X}^\circ > 0 \mid F(\vec{X}^\circ) > 0$. Следовательно, $\beta \leqslant 0$. Допустим, $\beta = 0$. Тогда $\vec{P} \neq 0 \ \Rightarrow\ \langle \vec{P}, \vec{X}^\circ \rangle > 0$ — противоречие. Значит, $\beta < 0$.

Положим $\tilde{\vec{P}} \overset{\circ}{=} \dfrac{1}{|\beta|}\vec{P}$. Тогда $\langle \tilde{\vec{P}}, \vec{X} \rangle - F(\vec{X}) \geqslant 0\ \forall \vec{X} \in \mathbb{R}^m_+$, или, что то же самое, $\langle \tilde{\vec{P}}, \vec{X} \rangle \geqslant F(\vec{X})\ \forall \vec{X} \in \mathbb{R}^m_+$, откуда следует, что

$$Q(\tilde{\vec{P}}) = \inf\left\{ \frac{\langle \tilde{\vec{P}}, \vec{X} \rangle}{F(\vec{X})} \;\middle|\; \vec{X} \in \mathbb{R}^m_+,\ F(\vec{X}) > 0 \right\} \geqslant 1 > 0.$$

3) Вогнутая на $\mathbb{R}^m$ функция непрерывна внутри своей области определения $\Rightarrow\ Q(\vec{P})$ непрерывна в $\operatorname{int} \mathbb{R}^m_+$. Осталось показать непрерывность $Q(\vec{P})$ на $\partial\mathbb{R}^m_+$.

Пусть $\vec{P}^\circ \in \partial\mathbb{R}^m_+$. Для доказательства непрерывности $Q(\vec{P}^\circ)$ нужно доказать ее полнуперерывность снизу $\left(\liminf\limits_{k\to\infty} Q(\vec{P}^k) \geqslant Q(\vec{P}^\circ)\right)$ и полунепрерывность сверху $\left(\limsup\limits_{k\to\infty} Q(\vec{P}^k) \leqslant Q(\vec{P}^\circ)\right)$.

$$Q(\vec{P}^\circ) = \inf\left\{ \frac{\langle \vec{P}^\circ, \vec{X} \rangle}{F(\vec{X})} \;\middle|\; \vec{X} \in \mathbb{R}^m_+,\ F(\vec{X}) > 0 \right\}.$$

Докажем, что $\limsup\limits_{k\to\infty} Q(\vec{P}^k) \leqslant \dfrac{\langle \vec{P}^\circ, \vec{X} \rangle}{F(\vec{X})}\ \forall \vec{X} \in \mathbb{R}^m_+,\ F(\vec{X}) > 0$. Рассмотрим последовательность $\{\vec{P}^k\}_{k=1}^{\infty}$, сходящуюся к $\vec{P}^\circ$. Зафиксируем $\tilde{\vec{X}} \in \mathbb{R}^m_+,\ F(\tilde{\vec{X}}) > 0$.

$$Q(\vec{P}^k) = \inf\left\{ \frac{\langle \vec{P}^k, \vec{X} \rangle}{F(\vec{X})} \;\middle|\; \vec{X} \in \mathbb{R}^m_+,\ F(\vec{X}) > 0 \right\} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{\langle \vec{P}^k, \tilde{\vec{X}} \rangle}{F(\tilde{\vec{X}})} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lim_{k\to\infty} Q(\vec{P}^k) \leqslant \frac{\langle \vec{P}^\circ, \tilde{\vec{X}} \rangle}{F(\tilde{\vec{X}})} \forall \tilde{\vec{X}} \in \mathbb{R}^m_+ \mid F(\tilde{\vec{X}}) > 0 \ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lim_{k\to\infty} Q(\vec{P}^k) \leqslant \inf\left\{ \frac{\langle \vec{P}^\circ, \vec{X} \rangle}{F(\vec{X})} \;\middle|\; \vec{X} \in \mathbb{R}^m_+,\ F(\vec{X}) > 0 \right\} = Q(\vec{P}^\circ),$$

т. е. доказали полунепрерывность сверху.

Докажем полунепрерывность снизу. Пусть $\vec{e}_j$ — базисный вектор в $\mathbb{R}^m$ ($j = \overline{1,\ m}$).

Рассмотрим конусы $K_j = \mathrm{cone}\{\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_{j-1}, \vec{P}^\circ, \vec{e}_{j+1}, \ldots, \vec{e}_m\}$, где $\vec{P}^\circ \in \mathbb{R}^m$ — произвольный не равный нулю вектор. Будем учитывать лишь те K_j, у которых $\mathrm{int} K_j \neq \varnothing$ (т. е. набор векторов $\{\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_{j-1}, \vec{P}^\circ, \vec{e}_{j+1}, \ldots, \vec{e}_m\}$ линейно независим).

Ясно, что существует j такой, что $\exists M \mid \forall k > M\ \vec{P}^k \in K_j$. Без ограничения общности будем считать, что $\{\vec{P}^k\}_{k=1}^{\infty} \in K_1$. Значит, можем предстваить $\vec{P}^k$ как $\vec{P}^k = \alpha_1(k)\vec{P}^\circ + \sum\limits_{j=2}^{m} \alpha_j(k)\vec{e}_j,\ (\alpha_j(k) \geqslant 0,\ j = \overline{1,\ m})$, причем это разложение единственно.

Так как $\lim\limits_{k\to\infty} \vec{P}^k = \vec{P}^\circ$, то $\lim\limits_{k\to\infty} \alpha_1(k) = 1,\ \lim\limits_{k\to\infty} \alpha_j(k) = 0,\ j = \overline{2,\ m}$.

$$Q(\vec{P}^k) = Q(\alpha_1(k))\vec{P}^\circ + \sum_{j=2}^{m} \alpha_j(k)\vec{e}_j \geqslant \alpha_1(k)Q(\vec{P}^\circ) + \sum_{j=2}^{m} \alpha_j(k)Q(\vec{e}_j).$$

Таким образом, $\liminf\limits_{k\to\infty} Q(\vec{P}^k) \geqslant Q(\vec{P}^\circ)$, т. е. полунепрерывность снизу доказана.

Шаг 2. Обозначим $\hat{F}(\vec{X}) \overset{\circ}{=} \inf\left\{ \dfrac{\langle \vec{P}, \vec{X} \rangle}{Q(\vec{P})} \;\middle|\; \vec{P} \in \mathbb{R}^m_+,\ Q(\vec{P}) > 0 \right\}$. Докажем, что $F(\vec{X}) = \hat{F}(\vec{X})$.

Из того, что $Q(\vec{P}) = \inf\left\{ \dfrac{\langle \vec{P}, \vec{X} \rangle}{F(\vec{X})} \;\middle|\; \vec{X} \in \mathbb{R}^m_+,\ F(\vec{X}) > 0 \right\}$ следует, что $\forall \vec{P} \in \mathbb{R}^m_+$, $\vec{X} \in \mathbb{R}^m_+$ выполнено $Q(\vec{P})F(\vec{X}) \leqslant \langle \vec{P}, \vec{X} \rangle$.

Следовательно, $\forall \vec{X} \in \mathbb{R}^m_+\ F(\vec{X}) \leqslant \dfrac{\langle \vec{P}, \vec{X} \rangle}{Q(\vec{P})}\ \forall \vec{P} \in \mathbb{R}^m_+ \mid Q(\vec{P}) > 0$, откуда $F(\vec{X}) \leqslant \hat{F}(\vec{X})$.

Допустим противное, что $\exists \vec{X}^* \in \mathbb{R}_+^m \mid F(\vec{X}^*) < \hat{F}(\vec{X}^*)$.

Рассмотрим Γ из *шага 1*. Очевидно, что $(\vec{X}^*, \hat{F}(\vec{X}^*)) \notin \Gamma$. По теореме отделимости $\exists (\vec{P}, \beta) \neq 0$:

$$\langle \vec{P}, \vec{X} \rangle + \beta t \geqslant 0 \ \forall (\vec{X}, t) \in \Gamma; \tag{1.28}$$

$$\langle \vec{P}, \vec{X}^* \rangle + \beta \hat{F}(\vec{X}^*) < 0. \tag{1.29}$$

Из (1.29), $\beta < 0$. Обозначим $\hat{\vec{P}} \overset{\circ}{=} \dfrac{1}{|\beta|} \vec{P} > 0$. Тогда из (1.28) следует, что для $\forall \vec{X} \in \mathbb{R}_+^m$ выполнено $\langle \hat{\vec{P}}, \vec{X} \rangle - F(\vec{X}) \geqslant 0$, а из (1.29) следует, что

$$\langle \hat{\vec{P}}, \vec{X}^* \rangle < \hat{F}(\vec{X}^*) \tag{1.30}$$

Таким образом,

$$Q(\hat{\vec{P}}) = \inf \left\{ \frac{\langle \hat{\vec{P}}, \vec{X} \rangle}{F(\vec{X})} \;\middle|\; \vec{X} \in \mathbb{R}_+^m, \ F(\vec{X}) > 0 \right\} \geqslant 1 \tag{1.31}$$

Однако, из определения $\hat{F}(\vec{X})$ имеем, что для $\forall \vec{P} \geqslant 0, \ \vec{X} \geqslant 0$

$$Q(\vec{P}) \hat{F}(\vec{X}) \leqslant \langle \vec{P}, \vec{X} \rangle. \tag{1.32}$$

Тогда из (1.30), подставляя (1.31) и (1.32), имеем:

$$\langle \hat{\vec{P}}, \vec{X}^* \rangle < \hat{F}(\vec{X}^*) \leqslant Q(\hat{\vec{P}}) \hat{F}(\vec{X}^*) \leqslant \langle \hat{\vec{P}}, \vec{X}^* \rangle,$$

— противоречие $\Rightarrow \ F(\vec{X}) = \hat{F}(\vec{X})$. ■

Связь между обратными функциями спроса и экономическими индексами покажет предложение 1.

Предложение 1. *Следующие утверждения относительно $\vec{P}(\vec{X})$ эквивалентны:*

1) $\exists F(\vec{X}) \in \Phi, \ Q(\vec{P}) \in \Phi$ такие, что
$\forall \vec{P} \in \mathbb{R}_+^m, \ \vec{X} \in \mathbb{R}_+^m$

$$Q(\vec{P}) F(\vec{X}) \leqslant \langle \vec{P}, \vec{X} \rangle;$$

$\forall \vec{X} \in \mathbb{R}_+^m$

$$Q\left(\vec{P}(\vec{X})\right) F(\vec{X}) \leqslant \langle \vec{P}(\vec{X}), \vec{X} \rangle.$$

**Это утверждение вышло из соображений агрегирования цен и объёмов в индексы (произведение оценки цен на оценку набора не превосходит стоимости набора в ценах $\vec{P}$).*

2) $F(\vec{x}) \in \Phi$ рационализирует обратные функции спроса.

3) $\exists F(\vec{X}) \in \Phi,\ Q(\vec{P}) \in \Phi$ *такие, что*
$\forall \vec{X} \in \mathbb{R}^m_+$

$$\frac{1}{Q(\vec{P})}\vec{P}(\vec{X}) \in \partial F(\vec{X}).$$

***Здесь $Q(\vec{P})$ — преобразование Янга.*

Замечание. Нетрудно видеть, что в случае, когда функция $F(\vec{X})$ дифференцируема соотношение 3) предложения принимает вид $P_i(\vec{X}) = Q\left(\vec{P}(\vec{X})\right)\dfrac{\partial F(\vec{X})}{\partial X_i}$, $i = \overline{1,m}$, откуда и вытекает *основная формула экономических индексов*:

$$Q\left(\vec{P}(\vec{X})\right) dF(\vec{X}) = \sum_{j=1}^{m} P_j(\vec{X}) dX_j.$$

Согласно этой формуле, чтобы посчитать изменение индекса спроса Конюса (функции полезности) при варьировании набора товаров, достаточно домножить эти количества на цены и индекс цен соответственно. Таким образом, проблема построения индексов Конюса потребления $F(\vec{X})$ и цен $Q(\vec{P})$ сводится к проблеме существования и поиска интегрирующего множителя $\dfrac{1}{Q\left(\vec{P}(\vec{X})\right)}$ для дифференциальной формы обратных функций спроса

$$\omega = \sum_{j=1}^{m} P_j(\vec{X}) dX_j$$

.

Доказательство. Докажем, что из 1) следует 3).
В силу 1)

$$\vec{X} \in Arg\min\Big\{\underbrace{\langle \vec{P}(\vec{X}), \vec{Y}\rangle - Q\left(\vec{P}(\vec{X})\right) F(\vec{Y})}_{\text{выпуклая функция от } \vec{Y}}\Big\} \ \Big|\ \vec{Y} \in \mathbb{R}^m_+$$

Она принимает минимум в точке $\vec{X}$ тогда и только тогда, когда

$$0 \in \partial\left(\langle \vec{P}(\vec{X}), \vec{Y}\rangle - Q\left(\vec{P}(\vec{X})\right) F(\vec{Y})\right)\Big|_{\vec{Y}=\vec{X}}.$$

По теореме Моро-Рокафеллара для супердифференциала суммы функций

$$\partial \left(\langle \vec{P}(\vec{X}), \vec{Y} \rangle - Q\left(\vec{P}(\vec{X})\right) F(\vec{Y}) \right)\Big|_{\vec{Y}=\vec{X}} =$$
$$= -\vec{P}(\vec{X}) + Q\left(\vec{P}(\vec{X})\right) \partial F(\vec{Y})\Big|_{\vec{Y}=\vec{X}}$$

откуда следует, что

$$\vec{P}(\vec{X}) \in Q\left(\vec{P}(\vec{X})\right) \partial F(\vec{X})$$

Докажем, что из 3) следует 2).

Запишем функцию Лагранжа:

$$\mathscr{L}(\vec{X}, \lambda) = F(\vec{Y}) + \lambda \left(\langle \vec{P}(\vec{X}), \vec{X} \rangle - \langle \vec{P}(\vec{X}), \vec{Y} \rangle \right)$$

Поскольку ограничения $\langle \vec{P}(\vec{X}), \vec{X} \rangle - \langle \vec{P}(\vec{X}), \vec{Y} \rangle \geqslant 0$ выполнены, то $\lambda > 0$. Тогда по теореме Куна-Таккера $\vec{X}$ доставляет максимум функции $F(\vec{Y})$ при ограничениях выше, так как выполнено

$$\partial \mathscr{L} = \partial F(\vec{Y})\Big|_{\vec{Y}=\vec{X}} - \lambda \vec{P}(\vec{X}) \ni 0$$

в силу того, что $\lambda = \dfrac{1}{Q\left(\vec{P}(\vec{X})\right)}$.

Докажем, что из 2) следует 1).

$$Q(\vec{P}) = \inf \left\{ \frac{\langle \vec{P}, \vec{X} \rangle}{F(\vec{X})} \;\middle|\; \vec{X} \in \mathbb{R}^m_+,\ F(\vec{X}) > 0 \right\}.$$

Вычислим

$$Q\left(\vec{P}(\vec{X})\right) = \inf \left\{ \frac{\langle \vec{P}(\vec{X}), \vec{X} \rangle}{F(\vec{Y})} \;\middle|\; \vec{Y} \in \mathbb{R}^m_+,\ F(\vec{Y}) > 0 \right\}.$$

Будем рассматривать только такие $\vec{Y}$, что $\langle \vec{P}(\vec{X}), \vec{Y} \rangle = \langle \vec{P}(\vec{X}), \vec{X} \rangle$. Так как в силу положительной однородности числитель не изменится, мы можем максимизировать его при $\langle \vec{P}(\vec{X}), \vec{Y} \rangle \leqslant \langle \vec{P}(\vec{X}), \vec{X} \rangle$. Из утверждения 2) предложения получаем

$$Q\left(\vec{P}(\vec{X})\right) = \frac{\langle \vec{P}(\vec{X}), \vec{X} \rangle}{F(\vec{X})},$$

а это эквивалентно 1). ∎

Упражнение 1.

Пусть $\hat{\vec{X}} \in \mathbb{R}^m_+$, $F(\hat{\vec{X}}) = 1$ и $\hat{\vec{P}} \in \partial F(\vec{X})\,\big|_{\vec{X}=\hat{\vec{X}}}$, где $Q(\vec{P})$ — преобразование Янга. Докажите, что тогда $Q(\hat{\vec{P}}) = 1$. Более того, $\hat{\vec{X}} \in \partial Q(\vec{P})\big|_{\vec{P}=\hat{\vec{P}}}$.

Упражнение 2.

Найти функцию $F(\vec{X})$ преобразование Янга которой равно ей самой.

Предложение 2. *Пусть существуют* $\vec{P}(t) = \vec{P}\left(\vec{X}(t)\right)$, $\vec{P}(\tau) = \vec{P}\left(\vec{X}(\tau)\right)$ *и* $\vec{P}(\vec{X})$ *рационализируема с функцией* $F(\vec{X}) \in \Phi$. *Тогда*

$$\frac{\langle \vec{P}(\tau), \vec{X}(t)\rangle}{\langle \vec{P}(\tau), \vec{X}(\tau)\rangle} \geqslant \frac{\langle \vec{P}(\tau), \hat{\vec{X}}(t)\rangle}{\langle \vec{P}(\tau), \vec{X}(\tau)\rangle} = \frac{\langle \vec{P}(t), \vec{X}(t)\rangle}{\langle \vec{P}(t), \hat{\vec{X}}(\tau)\rangle} \geqslant \frac{\langle \vec{P}(t), \vec{X}(t)\rangle}{\langle \vec{P}(t), \vec{X}(\tau)\rangle}.$$

Доказательство. Докажем центральное равенство.

$$\frac{\langle \vec{P}(\tau), \hat{\vec{X}}(t)\rangle}{\langle \vec{P}(\tau), \vec{X}(\tau)\rangle} = \frac{\left\langle \vec{P}\left(\hat{\vec{X}}(t)\right), \hat{\vec{X}}(t)\right\rangle}{\left\langle \vec{P}\left(\vec{X}(\tau)\right), \vec{X}(\tau)\right\rangle}.$$

Здесь вектора $\vec{P}$ и $\vec{X}$ соответствуют друг другу, т. е. считаем, что $\vec{P}(\tau) = \vec{P}\left(\vec{X}(\tau)\right)$ и $\vec{P}(\tau) = \vec{P}\left(\hat{\vec{X}}(t)\right)$. Тогда имеем:

$$\frac{\langle \vec{P}(\tau), \hat{\vec{X}}(t)\rangle}{\langle \vec{P}(\tau), \vec{X}(\tau)\rangle} = \frac{Q\left(\vec{P}(\tau)\right) F\left(\hat{\vec{X}}(t)\right)}{Q\left(\vec{P}(\tau)\right) F\left(\vec{X}(\tau)\right)} = \frac{F\left(\vec{X}(t)\right)}{F\left(\vec{X}(\tau)\right)}.$$

Аналогично

$$\frac{\langle \vec{P}(t), \vec{X}(t)\rangle}{\langle \vec{P}(t), \hat{\vec{X}}(\tau)\rangle} = \frac{\left\langle \vec{P}\left(\vec{X}(t)\right), \vec{X}(t)\right\rangle}{\left\langle \vec{P}\left(\hat{\vec{X}}(\tau)\right), \hat{\vec{X}}(\tau)\right\rangle} = \frac{Q\left(\vec{P}(t)\right) F\left(\vec{X}(t)\right)}{Q\left(\vec{P}(t)\right) F\left(\hat{\vec{X}}(\tau)\right)} = \frac{F\left(\vec{X}(t)\right)}{F\left(\vec{X}(\tau)\right)},$$

откуда получаем

$$\frac{\langle \vec{P}(\tau), \hat{\vec{X}}(t)\rangle}{\langle \vec{P}(\tau), \vec{X}(\tau)\rangle} = \frac{\langle \vec{P}(t), \vec{X}(t)\rangle}{\langle \vec{P}(t), \hat{\vec{X}}(\tau)\rangle}.$$

Докажем левое неравенство.

$$\frac{\langle \vec{P}(\tau), \vec{X}(t)\rangle}{\langle \vec{P}(\tau), \vec{X}(\tau)\rangle},$$

— здесь $\vec{P}$ и $\vec{X}$ друг другу не соотвтетствуют, поэтому пользуемся неравенством из предложения 1:

$$\frac{\langle\vec{P}(\tau),\vec{X}(t)\rangle}{\langle\vec{P}(\tau),\vec{X}(\tau)\rangle}=\frac{\langle\vec{P}(\tau),\vec{X}(t)\rangle}{\left\langle\vec{P}\left(\vec{X}(\tau)\right),\vec{X}(\tau)\right\rangle}=\frac{\langle\vec{P}(\tau),\vec{X}(t)\rangle}{Q\left(\vec{P}(\tau)\right)F\left(\vec{X}(\tau)\right)}\geqslant$$
$$\geqslant\frac{Q\left(\vec{P}(\tau)\right)F\left(\vec{X}(t)\right)}{Q\left(\vec{P}(\tau)\right)F\left(\vec{X}(\tau)\right)}=\frac{F\left(\vec{X}(t)\right)}{F\left(\vec{X}(\tau)\right)}.$$

Аналогично для правого неравенства:

$$\frac{\langle\vec{P}(t),\vec{X}(t)\rangle}{\langle\vec{P}(t),\vec{X}(\tau)\rangle}=\frac{\left\langle\vec{P}\left(\vec{X}(t)\right),\vec{X}(t)\right\rangle}{\langle\vec{P}(t),\vec{X}(\tau)\rangle}=\frac{Q\left(\vec{P}(t)\right)F\left(\vec{X}(t)\right)}{\langle\vec{P}(t),\vec{X}(\tau)\rangle}\leqslant$$
$$\leqslant\frac{Q\left(\vec{P}(t)\right)F\left(\vec{X}(t)\right)}{Q\left(\vec{P}(t)\right)F\left(\vec{X}(\tau)\right)}=\frac{F\left(\vec{X}(t)\right)}{F\left(\vec{X}(\tau)\right)}.$$

■

Пусть известны денежные характеристики того, сколько потратило население на покупку тех или иных товаров — это

$$\left\langle\vec{P}\left(\vec{X}(t)\right),\vec{X}(t)\right\rangle \text{ и } \left\langle\vec{P}\left(\vec{X}(\tau)\right),\vec{X}(\tau)\right\rangle.$$

Как будут меняться расходы? Ф. Дивизиа (1925 г.) предложил следующую концепцию изменения расходов:

$$\frac{d\langle\vec{P},\vec{X}\rangle}{\langle\vec{P},\vec{X}\rangle}=\frac{\langle\vec{X},d\vec{P}\rangle}{\langle\vec{P},\vec{X}\rangle}+\frac{\langle\vec{P},d\vec{X}\rangle}{\langle\vec{P},\vec{X}\rangle}.$$

Тогда отношение расходов текущего периода к расходам базового равно

$$\frac{\langle\vec{P}(t),\vec{X}(t)\rangle}{\langle\vec{P}(\tau),\vec{X}(\tau)\rangle}=\exp\left(\int\limits_{\tau}^{t}\frac{d\langle\vec{P}(\theta),\vec{X}(\theta)\rangle}{\langle\vec{P}(\theta),\vec{X}(\theta)\rangle}\right)=$$
$$=\underbrace{\exp\left(\int\limits_{\tau}^{t}\frac{\langle\vec{X}(\theta),d\vec{P}(\theta)\rangle}{\langle\vec{P}(\theta),\vec{X}(\theta)\rangle}\right)}_{D_P}\underbrace{\exp\left(\int\limits_{\tau}^{t}\frac{\langle\vec{P}(\theta),d\vec{X}(\theta)\rangle}{\langle\vec{P}(\theta),\vec{X}(\theta)\rangle}\right)}_{D_X}.$$

Здесь имеет место разбиение по ценам и по количеству: D_P — *индекс Дивизиа цен*, D_X — *индекс Дивизиа количеств.*

Предложение 3. *Пусть* $\vec{P}(\vec{X})$ *рационализируема с функцией* $F(\vec{X}) \in \Phi$, $\vec{P}\left(\vec{X}(t)\right) = \vec{X}(t)$, $\vec{P}\left(\vec{X}(\tau)\right) = \vec{X}(\tau)$, $\vec{P}\left(\vec{X}(\theta)\right) = \vec{P}(\theta)$, *где* $\theta \in [\tau, t]$. *Тогда*

$$D_X(\tau, t) = \frac{F\left(\vec{X}(t)\right)}{F\left(\vec{X}(\tau)\right)},$$

т. е. совпадает с индексом Конюса.

Доказательство.

$$D_X(\tau, t) = \exp\int\limits_{\tau}^{t} \frac{\left\langle \vec{P}\left(\vec{X}(\theta)\right), d\vec{X}(\theta)\right\rangle}{\left\langle \vec{P}\left(\vec{X}(\theta)\right), \vec{X}(\theta)\right\rangle} = \exp\int\limits_{\tau}^{t} \frac{Q\left(\vec{P}(\theta)\right) dF\left(\vec{X}(\theta)\right)}{Q\left(\vec{P}(\theta)\right) F\left(\vec{X}(\theta)\right)} =$$

$$= \frac{F\left(\vec{X}(t)\right)}{F\left(\vec{X}(\tau)\right)}.$$

■

Пусть обратные функции спроса $\vec{P}(\vec{X}) \in \mathrm{C}^1(\mathbb{R}^m_+)$. Напомним основную формулу экономических индексов:

$$Q\left(\vec{P}(\vec{X})\right) dF(\vec{X}) = \sum_{j=1}^{m} P_j(\vec{X}) dX_j.$$

Необходимо найти интегрирующий множитель $\dfrac{1}{Q\left(\vec{P}(\vec{X})\right)}$ такой, чтобы $dF(\vec{X})$ был полным дифференциалом.

$$\lambda(\vec{X}) P_j(\vec{X}) = \frac{\partial F(\vec{X})}{\partial X_j},\ j = \overline{1, m}.$$

Для гладких функций $\dfrac{\partial^2 F(\vec{X})}{\partial X_i \partial X_j} = \dfrac{\partial^2 F(\vec{X})}{\partial X_j \partial X_i}$, откуда имеем:

$$\frac{\partial}{\partial X_i}\left(\lambda(\vec{X}) P_j(\vec{X})\right) = \frac{\partial}{\partial X_j}\left(\lambda(\vec{X}) P_i(\vec{X})\right);$$

$$\lambda(\vec{X})\left(\frac{\partial P_j(\vec{X})}{\partial X_i} - \frac{\partial P_i(\vec{X})}{\partial X_j}\right) = P_i(\vec{X})\frac{\partial \lambda(\vec{X})}{\partial X_j} - P_j(\vec{X})\frac{\partial \lambda(\vec{X})}{\partial X_i}\ \Big|\times P_k(\vec{X}) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lambda(\vec{X})P_k(\vec{X})\left(\frac{\partial P_j(\vec{X})}{\partial X_i}-\frac{\partial P_i(\vec{X})}{\partial X_j}\right)=P_k(\vec{X})P_i(\vec{X})\frac{\partial\lambda(\vec{X})}{\partial X_j}-P_j(\vec{X})P_k(\vec{X})\frac{\partial\lambda(\vec{X})}{\partial X_i}. \tag{1.33}$$

Далее аналогично:

$$\lambda(\vec{X})\left(\frac{\partial P_i(\vec{X})}{\partial X_k}-\frac{\partial P_k(\vec{X})}{\partial X_i}\right)=P_k(\vec{X})\frac{\partial\lambda(\vec{X})}{\partial X_i}-P_i(\vec{X})\frac{\partial\lambda(\vec{X})}{\partial X_k}\ \Big|\times P_j(\vec{X})\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lambda(\vec{X})P_j(\vec{X})\left(\frac{\partial P_i(\vec{X})}{\partial X_k}-\frac{\partial P_k(\vec{X})}{\partial X_i}\right)=P_j(\vec{X})P_k(\vec{X})\frac{\partial\lambda(\vec{X})}{\partial X_i}-P_i(\vec{X})P_j(\vec{X})\frac{\partial\lambda(\vec{X})}{\partial X_k}. \tag{1.34}$$

$$\lambda(\vec{X})\left(\frac{\partial P_k(\vec{X})}{\partial X_j}-\frac{\partial P_j(\vec{X})}{\partial X_k}\right)=P_j(\vec{X})\frac{\partial\lambda(\vec{X})}{\partial X_k}-P_k(\vec{X})\frac{\partial\lambda(\vec{X})}{\partial X_j}\ \Big|\times P_i(\vec{X})\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lambda(\vec{X})P_i(\vec{X})\left(\frac{\partial P_k(\vec{X})}{\partial X_j}-\frac{\partial P_j(\vec{X})}{\partial X_k}\right)=P_i(\vec{X})P_j(\vec{X})\frac{\partial\lambda(\vec{X})}{\partial X_k}-P_k(\vec{X})P_i(\vec{X})\frac{\partial\lambda(\vec{X})}{\partial X_j}. \tag{1.35}$$

Складывая равенства (1.33), (1.34) и (1.35), получаем:

$$P_k(\vec{X})\left(\frac{\partial P_j(\vec{X})}{\partial X_i}-\frac{\partial P_i(\vec{X})}{\partial X_j}\right)+P_j(\vec{X})\left(\frac{\partial P_i(\vec{X})}{\partial X_k}-\frac{\partial P_k(\vec{X})}{\partial X_i}\right)+$$
$$+P_i(\vec{X})\left(\frac{\partial P_k(\vec{X})}{\partial X_j}-\frac{\partial P_j(\vec{X})}{\partial X_k}\right)=0$$

— *условие интегрируемости Фробениуса* (необходимое).

Упражнение.

Доказать, что данное условие является также и достаточным.

Указание: можно провести аналогию с уравнением в вариациях в теории диффиеренциальных уравнений (эти условия следуют из условий разрешимости дифференциальной задачи).

Условие Фробениуса выражает критерий существования интегрирующего множителя для дифференциальной формы обратных функций спроса и является условием типа равенства. Оно нарушается при малых возмущениях функций $\vec{P}(\vec{X})$ в норме пространства $\mathrm{C}^1(\mathbb{R}^m_+)$. Существование экономических индексов является одним из постулатов современной экономической теории, объясняющим возможность регулировать потоки разнообразных товаров, номенклатура которых составляет порядка 10^9 наименований, с помощью «скалярной» обратной связи — финансовых потоков. Поэтому нарушение условий Фробениуса при малых возмущениях воспринималось экономистами как проблема интегрируемости.

Появление в экономической литературе условий интегрируемости восходит к работам Дж. Антонелли (1886 г.), В. Вольтера (1906 г.). Сами условия были получены Е. Е. Слуцким (1915 г.). В тот же период аналогичная проблема решалась в физике. К. Каратеодори сформулировал второе начало термодинамики в форме существования интегрирующего множителя для дифференциальной формы количества теплоты.

$$\delta Q = P(V, N_1, \ldots, N_m)dV + \sum_{j=1}^{m} \mu_j(V, N_1, \ldots, N_m)dN_j,$$

$$dS = \frac{1}{T}\left(P(V, N_1, \ldots, N_m)dV + \sum_{j=1}^{m} \mu_j(V, N_1, \ldots, N_m)dN_j\right).$$

Из этой формулировки следовало, что уравнения состояния, химические потенциалы, внутренняя энергия задаются функциями, которые удовлетворяют условиям интегрируемости Фробениуса и, значит, не являются функциями общего положения. Поэтому возник вопрос: являются ли условия интегрируемости дифференциальной формы обратных функций спроса фундаментальным законом, подобным второму началу термодинамики?

Анализу выполнимости и интерпретации условий интегрируемости для дифференциальной формы обратных функций спроса посвящены работы многих известных экономистов XX века, таких, как В. Парето, П. Самуэльсон, Дж. Хикс, Х. Хотеллин, Х. Хаутеккер, К. Эрроу, Л. Гурвиц, Х. Удзава, Д. Гейл, М. Рихтер и др. Их усилия привели к созданию *теории выявленного предпочтения*, в терминах которой удалось переформулировать условия рациональности поведения в форме, удобной для эмпирической проверки.

1.6.4 Теория выявленного предпочтения.

Понятие выявленного предпочтения было введено П. Самуэльсоном (1938 г.) следующим образом.

Определение 10. Будем говорить, что $\vec{X} \in \mathbb{R}_+^m$ выявленно предпочтительнее, чем $\vec{Y} \in \mathbb{R}_+^m$, если $\langle \vec{P}(\vec{X}), \vec{X} \rangle \geqslant \langle \vec{P}(\vec{X}), \vec{Y} \rangle$. Обозначение $\vec{X} \succ \vec{Y}$.

П. Самуэльсон, развивая концепцию рационального репрезентативного потребителя, вкладывал в определение следующий содержательный смысл. При ценах $\vec{P}(\vec{X})$ набор товаров $\vec{Y}$ стоил $\langle \vec{P}(\vec{X}), \vec{Y} \rangle$ и был доступен потребителю, располагающему бюджетом в $\langle \vec{P}(\vec{X}), \vec{X} \rangle$. Поскольку ценам $\vec{P}(\vec{X})$ соответствует приобретение набора товаров $\vec{X}$, набор товаров $\vec{X}$ выявлено предпочтительнее доступного в силу бюджетных ограничений набора товаров $\vec{Y}$.

П. Самуэльсоном было сформулировано следующее свойство, которое при размерности номенклатуры $m = 2$ является необходимым и достаточным условием рационализируемости обратных функций спроса $\vec{P}(\vec{X})$ в классе функций полезности Φ, и высказал гипотезу о том, что результат можно обобщить на произвольные $m \geqslant 2$.

Слабая аксиома теории выявленного предпочтения.

Если $\vec{X} \in \mathbb{R}^m_+$, $\vec{Y} \in \mathbb{R}^m_+$, $\vec{X} \succ \vec{Y}$ *и* $\vec{Y} \succ \vec{X}$, *то* $\langle \vec{P}(\vec{X}), \vec{X} \rangle = \langle \vec{P}(\vec{X}), \vec{Y} \rangle$ *и* $\langle \vec{P}(\vec{Y}), \vec{Y} \rangle = \langle \vec{P}(\vec{Y}), \vec{X} \rangle$.

Предложение 4. *Пусть* $\langle \vec{P}(\vec{X}), \vec{X} \rangle > 0$ *при любых* $\vec{X} \in \mathbb{R}^m_+\ \{0\}$ *и выполнено условие отделимости: для любых* $i,\ j \in 1, \ldots, m, \lambda > 0, \vec{X} \in \mathrm{int}\mathbb{R}^m_+$ *справедливо соотношение*

$$\frac{P_i(\lambda \vec{X})}{P_j(\lambda \vec{X})} = \frac{P_i(\vec{X})}{P_j(\vec{X})}.$$

Для того, чтобы для любой пары точек из множества $\{\lambda \vec{X} \mid \lambda > 0\} \cup \{\mu \vec{Y} \mid \mu > 0\}$ *выполнялась слабая аксиома теории выявленного предпочтения, необходимо и достаточно, чтобы было справедливо неравенство*

$$\langle \vec{P}(\vec{X}), \vec{Y} \rangle \langle \vec{P}(\vec{Y}), \vec{X} \rangle \geqslant \langle \vec{P}(\vec{X}), \vec{X} \rangle \langle \vec{P}(\vec{Y}), \vec{Y} \rangle. \tag{1.36}$$

Доказательство. *Необходимость.* Выберем $\mu_1 > 0$ таким, что

$$\langle \vec{P}(\vec{X}), \vec{X} \rangle = \langle \vec{P}(\vec{X}), \mu_1 \vec{Y} \rangle. \tag{1.37}$$

Тогда, в силу слабой аксиомы теории выявленного предпочтения, имеем, что $\vec{P}(\mu_1 \vec{Y}), \mu_1 \vec{Y} \rangle \leqslant \langle \vec{P}(\mu_1 \vec{Y}), \vec{X} \rangle$. Откуда, в силу условия отделимости, получаем, что

$$\langle \vec{P}(\vec{Y}), \mu_1 \vec{Y} \rangle \leqslant \langle \vec{P}(\vec{Y}), \vec{X} \rangle. \tag{1.38}$$

Перемножая соотношения (1.37) и (1.38) и сокращая на $\mu_1 > 0$, получаем (1.36). Необходимость доказана.

Достаточность. Пусть $\lambda_1 \vec{X} \succ \mu_1 \vec{Y}$ и $\mu_1 \vec{Y} \succ \lambda_1 \vec{X}$, где $\lambda_1 > 0,\ \mu_1 > 0$. С учётом условия отделимости имеем, что $\langle \vec{P}(\vec{X}), \lambda_1 \vec{X} \rangle \geqslant \langle \vec{P}(\vec{X}), \mu_1 \vec{Y} \rangle$ и $\langle \vec{P}(\vec{Y}), \mu_1 \vec{Y} \rangle \geqslant \langle \vec{P}(\vec{Y}), \lambda_1 \vec{X} \rangle$. Перемножая эти неравенства и сокращая на положительный множитель $\lambda_1 \mu_1$, получаем $\langle \vec{P}(\vec{X}), \vec{Y} \rangle \langle \vec{P}(\vec{Y}), \vec{X} \rangle \leqslant \langle \vec{P}(\vec{X}), \vec{X} \rangle \langle \vec{P}(\vec{Y}), \vec{Y} \rangle$. Откуда в силу (1.36) имеем $\langle \vec{P}(\vec{X}), \vec{Y} \rangle \langle \vec{P}(\vec{Y}), \vec{X} \rangle = \langle \vec{P}(\vec{X}), \vec{X} \rangle \langle \vec{P}(\vec{Y}), \vec{Y} \rangle$. Следовательно, $\langle \vec{P}(\vec{X}), \lambda_1 \vec{X} \rangle = \langle \vec{P}(\vec{X}), \mu_1 \vec{Y} \rangle$ и $\langle \vec{P}(\vec{Y}), \mu_1 \vec{Y} \rangle = \langle \vec{P}(\vec{Y}), \lambda_1 \vec{X} \rangle$. Достаточность доказана. ■

Однородная слабая аксиома теории выявленного предпочтения.

Для любых $\vec{X} \in \mathbb{R}^m_+$ и $\vec{Y} \in \mathbb{R}^m_+$ справедливо неравенство

$$\langle \vec{P}(\vec{X}), \vec{Y} \rangle \langle \vec{P}(\vec{Y}), \vec{X} \rangle \geqslant \langle \vec{P}(\vec{X}), \vec{X} \rangle \langle \vec{P}(\vec{Y}), \vec{Y} \rangle$$

Стоит отметить, что однородная слабая аксиома теории выявленного предпочтения эквивалентна эффекту Гершенкрона.

Хаутеккер Х. С. (1950 г.) предложил более сильное требование, являющееся необходимым и достаточным для рационализируемости обратных функций спроса в классе функций полезности Φ.

Сильная аксиома теории выявленного предпочтения.
Если $k \geqslant 2$, $\vec{X}_i \in \mathbb{R}^m_+$, $i = \overline{1,k}$ и $\vec{X}^{(1)} \succ \vec{X}^{(2)}$, $\vec{X}^{(2)} \succ \vec{X}^{(3)}$, $\ldots$, $\vec{X}^{(k-1)} \succ \vec{X}^{(k)}$, $\vec{X}^{(k)} \succ \vec{X}^{(1)}$, то

$$\begin{aligned} \langle \vec{P}(\vec{X}^{(i)}), \vec{X}^{(i)} \rangle &= \langle \vec{P}(\vec{X}^{(i)}), \vec{X}^{(i+1)} \rangle,\ i = \overline{1, k-1} \\ \langle \vec{P}(\vec{X}^{(k)}), \vec{X}^{(k)} \rangle &= \langle \vec{P}(\vec{X}^{(k)}), \vec{X}^{(1)} \rangle. \end{aligned}$$

Слабая аксиома выявленного предпочтения является частным случаем сильной аксиомы выявленного предпочтения при $k = 2$.

Попытки доказать эквивалентность слабой и сильной аксиом предпринимались до тех пор, пока Д. Гейл (1960 г.) не построил пример обратных функций спроса, удовлетворяющих слабой аксиоме теории выявленного предпочтения, но не рационализируемых.

Чистое доказательство того, что сильная аксиома выявленного предпочтения является критерием рационализируемости обратных функций спроса $\vec{P}(\vec{X})$ представил Б. Стиум (1973 г.).

Предложение 5. *Пусть $\langle \vec{P}(\vec{X}), \vec{X} \rangle > 0$ при любых $\vec{X} \in \mathbb{R}^m_+ \ \{0\}$ и выполнено условие отделимости (см. предложение 4). Для того, чтобы для любой пары точек из множества
$\{\lambda_1 \vec{X}^{(1)} \mid \lambda_1 > 0\} \cup \{\lambda_2 \vec{X}^{(2)} \mid \lambda_2 > 0\} \cup \ldots \cup \{\lambda_k \vec{X}^{(k)} \mid \lambda_k > 0\}$ выполнялась сильная аксиома теории выявленного предпочтения, необходимо и достаточно, чтобы для любого упорядоченного набора $\{t_1, \ldots, t_k\} \subset \{0, \ldots, T\}$ было справедливо неравенство*

$$\begin{aligned} &\langle \vec{P}(\vec{X}^{t_1}), \vec{X}^{t_2} \rangle \langle \vec{P}(\vec{X}^{t_2}), \vec{X}^{t_3} \rangle \ldots \langle \vec{P}(\vec{X}^{t_k}), \vec{X}^{t_1} \rangle \geqslant \\ &\geqslant \langle \vec{P}(\vec{X}^{t_1}), \vec{X}^{t_1} \rangle \langle \vec{P}(\vec{X}^{t_2}), \vec{X}^{t_2} \rangle \ldots \langle \vec{P}(\vec{X}^{t_k}), \vec{X}^{t_k} \rangle. \end{aligned}$$

Упражнение. Докажите предложение 5.

Определение 11. Будем говорить, что обратные функции спроса $\vec{P}(\vec{X})$ удовлетворяют однородной сильной аксиоме (ОСА) теории выявленного предпочтения, если для любого набора векторов $\{\vec{X}^{(1)},\ \ldots,\ \vec{X}^{(k)}\}$ из $\mathbb{R}^m_+$ справедливо неравенство

$$\langle\vec{P}(\vec{X}^{(1)}),\vec{X}^{(2)}\rangle\langle\vec{P}(\vec{X}^{(2)}),\vec{X}^{(3)}\rangle\ldots\langle\vec{P}(\vec{X}^{(k)}),\vec{X}^{(1)}\rangle\geqslant$$
$$\geqslant\langle\vec{P}(\vec{X}^{(1)}),\vec{X}^{(1)}\rangle\langle\vec{P}(\vec{X}^{(2)}),\vec{X}^{(2)}\rangle\ldots\langle\vec{P}(\vec{X}^{(k)}),\vec{X}^{(k)}\rangle$$

Исходной информацией для вычисления индексов цен и спроса служит торговая статистика $\{\vec{P}(t),\vec{X}(t)\}_{t=0}^{T}$ данной группы товаров, которая определяет значения обратных функций спроса в конечном числе точек $\{\vec{X}(t)\}_{t=0}^{T}$. Будем понимать под рационализируемостью торговой статистики возможность продолжить её до обратных функций спроса, рационализируемых в классе Φ. Теория выявленного предпочтения позволяет конструктивно проверять по торговой статистике, удовлетворяет ли она гипотезе о рациональности поведения и вычислять индексы Конюса. В основе алгоритмов проверки лежит следующая теорема.

Теорема 9 (Африат (1960), Вериан (1983))**.** *Следующие свойства торговой статистики эквивалентны:*

1) существует функция полезности $F\left(\vec{X}(t)\right)\in\Phi$*, рационализирующая торговую статистику, т. е.*

$$\vec{X}(t)\in Arg\max\{F(\vec{Y})\mid\langle\vec{P}(t),\vec{Y}\rangle\leqslant\langle\vec{P}(t),\vec{X}(t)\rangle,\ \vec{Y}\geqslant 0\},\ t=\overline{0,T};$$

2) система линейных неравенств

$$\lambda_t\langle\vec{P}(t),\vec{X}(t)\rangle\leqslant\lambda_\tau\langle\vec{P}(\tau),\vec{X}(t)\rangle,\ (t,\ \tau=\overline{0,T}) \tag{1.39}$$

имеет положительное решение $\lambda_0>0,\ \lambda_1>0,\ \ldots,\ \lambda_T>0$*;*

3) торговая статистика удовлетворяет ОСА, т. е. для любого упорядоченного набора моментов времени $t_1,\ldots,t_k\in\{0,1,\ldots,T\}$ *выполнено*

$$\langle\vec{P}(t_1),\vec{X}(t_2)\rangle\cdot\langle\vec{P}(t_2),\vec{X}(t_3)\rangle\cdot\ldots\cdot\langle\vec{P}(t_{k-1}),\vec{X}(t_k)\rangle\cdot\langle\vec{P}(t_k),\vec{X}(t_1)\rangle\geqslant$$
$$\geqslant\langle\vec{P}(t_1),\vec{X}(t_1)\rangle\cdot\ldots\cdot\langle\vec{P}(t_k),\vec{X}(t_k)\rangle;$$

4) существует функция полезности вида $F(\vec{X})=\min\limits_{t=\overline{0,T}}\lambda_t\langle\vec{P}(t),\vec{X}\rangle$*, рационализирующая торговую статистику.*

Решение системы (1.39) можно найти с помощью вычислительного алгоритма Варшалла-Флойда. Обозначим коэффициенты матрицы индексов цен Пааше через

$$C_{\tau t}=\frac{\langle\vec{P}(t),\vec{X}(t)\rangle}{\langle\vec{P}(\tau),\vec{X}(t)\rangle}.$$

В новых переменных система (1.39) имеет вид

$$\lambda_t C_{\tau t} \leqslant \lambda_\tau \tag{1.40}$$

Определим $C^*_{\tau t}$ как максимум по всем возможным упорядоченным подмножествам $\{t_1,\ \ldots,\ t_k\}$ множества $\mathscr{T} = \{0,\ 1,\ \ldots,\ T\}$ произведений вида $C_{\tau t_1} C_{t_1 t_2} \ldots C_{t_k t}$, считая при этом, что пустому множеству соответствует $C_{\tau t}$, т. е.

$$C^*_{\tau t} = \max_{\substack{\{t_1,\ldots,t_k\}\subset\mathscr{T},\\ k\geqslant 0}} \{C_{\tau t_1} \cdot C_{t_1 t_2} \cdot \ldots \cdot C_{t_k t}\}$$

Из теоремы Африата-Вериана следует, что система (1.40) разрешима тогда и только тогда, когда $^*_{tt} < 1,\ t \in \mathscr{T}$. Можно заметить, что если система (1.40) имеет решение, то она эквивалентна системе

$$\lambda_t C^*_{\tau t} \leqslant \lambda_\tau. \tag{1.41}$$

Если система (1.41) имеет решение, то набор переменных

$$\lambda_t = \max_{\beta\in\mathscr{T}} C^*_{t\beta},\ t \in \mathscr{T}$$

является решением системы (1.40), а значит, и решением (1.39).

По положительному решению системы (1.39) можно построить временные ряды индексов потребительских цен Конюса

$$\left\{\frac{1}{\lambda_t}\right\}_{t=0}^{T}$$

и индексов спроса Конюса

$$\left\{\lambda_t \langle \vec{P}(t), \vec{X}(t)\rangle\right\}_{t=0}^{T},$$

которые учитывают изменения структуры потребления. Такой метод построения экономических индексов называется *непараметрическим методом.*

Глава 2

Экономическая интерпретация двойственности.

2.1 Некоторые сведения о двойственности в задачах линейного программирования.

Рассмотрим задачу линейного программирования (З. Л. П.):

$$\begin{cases} \vec{c}_1\vec{x}_1 + \vec{c}_2\vec{x}_2 \to \max \\ A_{11}\vec{x}_1 + A_{12}\vec{x}_2 \leqslant \vec{b}_1 \\ A_{21}\vec{x}_1 + A_{22}\vec{x}_2 = \vec{b}_2 \\ \vec{x}_1 \geqslant 0 \end{cases} \tag{2.1}$$

Здесь

$\vec{c}_1 \in \mathbb{R}^{n_1},\ \vec{c}_2 \in \mathbb{R}^{n_2}$;
$\vec{b}_1 \in \mathbb{R}^{m_1},\ \vec{b}_2 \in \mathbb{R}^{m_2}$;
$\vec{x}_1 \in \mathbb{R}^{n_1},\ \vec{x}_2 \in \mathbb{R}^{n_2}$;
A_{11} — $m_1 \times n_1$ матрица, A_{12} — $m_1 \times n_2$ матрица;
A_{21} — $m_2 \times n_1$ матрица, A_{22} — $m_2 \times n_2$ матрица.

Двойственная к З. Л. П. (2.1) задача

$$\begin{cases} \vec{b}_1\vec{u}_1 + \vec{b}_2\vec{u}_2 \to \min \\ A_{11}^{\mathrm{T}}\vec{u}_1 + A_{21}^{\mathrm{T}}\vec{u}_2 \geqslant \vec{c}_1 \\ A_{12}^{\mathrm{T}}\vec{u}_1 + A_{22}^{\mathrm{T}}\vec{u}_2 = \vec{c}_2 \\ \vec{u}_1 \geqslant 0 \end{cases} \tag{2.2}$$

Теорема 1 (Теорема двойственности).

З. Л. П. (2.1) имеет решение тогда и только тогда, когда имеет решение З. Л. П. (2.2). Если решения в З. Л. П. (2.1) и З. Л. П. (2.2) существуют, оптимальные значения функционалов этих задач совпадают.

Упражнение 1.

Привести пример, когда система неравенств, задающая ограничения в З. Л. П. (2.1) несовместна (совместна) и в З. Л. П. (2.2) несовместна (совместна).

Предложение 1. *Пусть $(\vec{x}_1,\ \vec{x}_2)$ удовлетворяет ограничениям З. Л. П. (2.1) (т. е. является допустимым решением прямой задачи), а $(\vec{u}_1,\ \vec{u}_2)$ удовлетворяет ограничениям З. Л. П. (2.2). Тогда*

$$\vec{b}_1\vec{u}_1 + \vec{b}_2\vec{u}_2 \geqslant \vec{c}_1\vec{x}_1 + \vec{c}_2\vec{x}_2.$$

Доказательство.

$$\begin{aligned}\vec{b}_1\vec{u}_1 + \vec{b}_2\vec{u}_2 &\geqslant \langle \vec{u}_1, A_{11}\vec{x}_1 + A_{12}\vec{x}_2\rangle + \langle \vec{u}_2, A_{21}\vec{x}_1 + A_{22}\vec{x}_2\rangle = \\ &= \langle \vec{x}_1, A_{11}^{\mathrm{T}}\vec{u}_1 + A_{21}^{\mathrm{T}}\vec{u}_2\rangle + \langle \vec{x}_2, A_{12}^{\mathrm{T}}\vec{u}_1 + A_{22}^{\mathrm{T}}\vec{u}_2\rangle \geqslant \\ &\geqslant \vec{c}_1\vec{x}_1 + \vec{c}_2\vec{x}_2\end{aligned}$$

■

Следствие 1. *Пусть выполнены условия предложения 1. Для того, чтобы $(\vec{x}_1,\ \vec{x}_2)$ был решением З. Л. П. (2.1), $(\vec{u}_1,\ \vec{u}_2)$ решением З. Л. П. (2.2) необходимо и достаточно, чтобы значения функционалов этих задач совпадали:*

$$\vec{b}_1\vec{u}_1 + \vec{b}_2\vec{u}_2 = \vec{c}_1\vec{x}_1 + \vec{c}_2\vec{x}_2.$$

Доказательство. *Необходимость.* Очевидно, следует из теоремы двойственности.

Достаточность. Пусть $(\hat{\vec{x}}_1, \hat{\vec{x}}_2)$ тоже удовлетворяет ограничениям З. Л. П. (2.1). Тогда в силу предложения 1

$$\vec{c}_1\hat{\vec{x}}_1 + \vec{c}_2\hat{\vec{x}}_2 \leqslant \vec{b}_1\vec{u}_1 + \vec{b}_2\vec{u}_2 = \vec{c}_1\vec{x}_1 + \vec{c}_2\vec{x}_2.$$

■

Теорема 2 (Критерий оптимальности в форме условий дополняющей нежесткости)**.** *Пусть $(\vec{x}_1,\ \vec{x}_2)$ удовлетворяет ограничениям З. Л. П. (2.1), а $(\vec{u}_1,\ \vec{u}_2)$ удовлетворяет ограничениям З. Л. П. (2.2). Для того, чтобы $(\vec{x}_1,\ \vec{x}_2)$ был решением З. Л. П. (2.1), $(\vec{u}_1,\ \vec{u}_2)$ решением З. Л. П. (2.2) необходимо и достаточно, чтобы выполнялись условия дополняющей нежесткости:*

$$\langle \vec{u}_1, \vec{b}_1 - A_{11}\vec{x}_1 - A_{12}\vec{x}_2\rangle = 0;$$

$$\langle \vec{x}_1, \vec{c}_1 - A_{11}^{\mathrm{T}}\vec{u}_1 - A_{21}^{\mathrm{T}}\vec{u}_2\rangle = 0.$$

Доказательство. См. предложение 1. ■

Определение 1. Функцией Лагранжа З. Л. П. (2.1) называется функция переменных $(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{u}_1, \vec{u}_2)$, определенная на $\mathbb{R}^{n_1}_{+} \times \mathbb{R}^{n_2} \times \mathbb{R}^{m_1}_{+} \times \mathbb{R}^{m_2}$ вида

$$\mathscr{L}(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{u}_1, \vec{u}_2) = \vec{c}_1\vec{x}_1 + \vec{c}_2\vec{x}_2 + \langle \vec{u}_1, \vec{b}_1 - A_{11}\vec{x}_1 - A_{12}\vec{x}_2 \rangle + \langle \vec{u}_2, \vec{b}_2 - A_{21}\vec{x}_1 - A_{22}\vec{x}_2 \rangle$$

Перегруппировав слагаемые в функции Лагранжа прямой задачи

$$\mathscr{L}(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{u}_1, \vec{u}_2) = \vec{b}_1\vec{u}_1 + \vec{b}_2\vec{u}_2 + \langle \vec{x}_1, \vec{c}_1 - A_{11}^{\mathrm{T}}\vec{u}_1 - A_{21}^{\mathrm{T}}\vec{u}_2 \rangle + \langle \vec{x}_2, \vec{c}_2 - A_{12}^{\mathrm{T}}\vec{u}_1 - A_{22}^{\mathrm{T}}\vec{u}_2 \rangle,$$

получим функцию Лагранжа двойственной задачи.

Назовем основные правила построения двойственной задачи в результате преобразования функции Лагранжа прямой задачи:

1) слагаемые, в которые не входят переменные прямой задачи, образуют функционал двойственной задачи;

2) слагаемые, умножаемые на одну и ту же переменную прямой задачи, образуют ограничение двойственной задачи;

3) переменным прямой задачи, на знак которых не наложены ограничения, соответствуют ограничения типа равенства в двойственной задаче;

4) переменным прямой задачи, на знак которых наложены ограничения неотрицательности, соответствуют ограничения типа неравенства в двойственной задаче, причем знак его выбирается таким образом, чтобы при нарушении неравенства, соответствующее слагаемое штрафовало функционал в функции Лагранжа двойственной задачи;

5) ограничениям типа неравенства в прямой задаче соответствуют неотрицательные переменные в двойственной задаче;

6) ограничениям типа равенства в прямой задаче соответствуют переменные произвольного знака в двойственной задаче.

Определение 2. Будем говорить, что набор векторов $\vec{x}_1^* \in \mathbb{R}^{n_1}_{+}$, $\vec{x}_2^* \in \mathbb{R}^{n_2}$, $\vec{u}_1^* \in \mathbb{R}^{m_1}_{+}$, $\vec{u}_2^* \in \mathbb{R}^{m_2}$ образует седловую точку функции Лагранжа, если для любых $\vec{x}_1 \in \mathbb{R}^{n_1}_{+}$, $\vec{x}_2 \in \mathbb{R}^{n_2}$, $\vec{u}_1 \in \mathbb{R}^{m_1}_{+}$, $\vec{u}_2 \in \mathbb{R}^{m_2}$ справедливы неравенства:

$$\mathscr{L}(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{u}_1^*, \vec{u}_2^*) \leqslant \mathscr{L}(\vec{x}_1^*, \vec{x}_2^*, \vec{u}_1^*, \vec{u}_2^*) \leqslant \mathscr{L}(\vec{x}_1*, \vec{x}_2*, \vec{u}_1, \vec{u}_2).$$

Теорема 3 (Куна-Таккера)**.**

1. Если $(\vec{x}_1^*, \vec{x}_2^*)$ — решение З. Л. П. (2.1), то существуют такие векторы $\vec{u}_1^* \in \mathbb{R}^{m_1}_{+}$, $\vec{u}_2^* \in \mathbb{R}^{m_2}$, что набор векторов $(\vec{x}_1^*,\ \vec{x}_2^*,\ \vec{u}_1^*,\ \vec{u}_2^*)$ образует седловую точку функции Лагранжа.

2. Если набор векторов $(\vec{x}_1^*,\ \vec{x}_2^*,\ \vec{u}_1^*,\ \vec{u}_2^*)$ образует седловую точку функции Лагранжа, то $(\vec{x}_1^*,\ \vec{x}_2^*)$ является решением З. Л. П. (2.1), а $(\vec{u}_1^*,\ \vec{u}_2^*)$ является решением З. Л. П. (2.2).

2.2 Экономическая интерпретация двойственности. Трудовая теория стоимости и ее критика.

Невозможно доказать теорему, использующую сразу все общие принципы трудовой теории стоимости, которая была предложена еще в XVIII — XIX веках А. Смитом и Д. Рикардо. Поэтому будем рассматривать отдельно примеры, отражающие сложившиеся в разные периоды развития производственных отношений экономические уклады, характеризующиеся факторами производства и механизмом распределения ресурсов в системе.

Пример 1. «Колониальная экономика». Резкий демографический скачок в начале XVIII-го века привел к тому, что традиционные способы ведения экономической деятельности стали нереализуемы. Избыток населения мигрировал из сельской местности в города. Это были люди, не имеющие навыков работы. Их использовали в качестве грубой рабочей силы. Такой неквалифицированный труд и являлся единственным первичным[1] ресурсом, ограничивающим производство. Этим же ресурсом лимитировалось производство и в колониальных странах доиндустриальной эпохи, экономика которых была нацелена на аграрно-сырьевой экспорт.

Пусть весь производственный сектор экономики разбит на n чистых отраслей, каждая из которых выпускает продукт только одного типа, причем разным отраслям соответсвуют разные выпускаемые продукты, т. е. в экономической системе выпускается n видов продуктов. Кроме того, будем считать все выпускаемые продукты взаимозаменяемыми. За основу возьмем статическую модель Леонтьева (как и раньше, $\vec{x}$ — вектор валовых выпусков, $\vec{\omega}$ — вектор конечных выпусков):

$$\begin{cases} \vec{x} = A\vec{x} + \vec{\omega} \\ \vec{\omega} \geqslant 0 \end{cases}$$

$n \times n$ матрица $A \geqslant 0$ — матрица Леонтьева. Будем считать ее продуктивной. Тогда ограничение $\vec{x} \geqslant 0$ выполняется автоматически:

$$\vec{x} = (E - A)\vec{\omega} \geqslant 0.$$

Пусть $\vec{c} = (c_1, \ldots, c_n) > 0$ — вектор трудоемкости (показывает сколько нужно затратить труда для производства единицы продукции вида $1, \ldots, n$). Предложение труда будем обозначать как R. Тогда естественное ресурсное ограничение примет вид

$$\vec{c}\vec{x} \leqslant R.$$

[1]Первичные ресурсы — те, которые не реализуются в течение рассматриваемого периода.

Пусть $\vec{\pi} = (\pi_1, \ldots, \pi_n)$ — вектор «мировых» цен. Считая, что весь конечный выпуск $\vec{\omega}$ идет на экспорт, запишем целевой функционал:

$$\vec{\pi}\vec{\omega} \to \max$$

т. е. в условиях колониального режима правящая элита заинтересована в максимизации конечной продукции в ценах мирового рынка.

Итак, имеем следующую З. Л. П.:

$$\begin{cases} \vec{\pi}\vec{\omega} \to \max \\ \vec{x} = A\vec{x} + \vec{\omega} & \big| \vec{p} \\ \vec{c}\vec{x} \leqslant R & \big| s \geqslant 0 \\ \vec{\omega} \geqslant 0 \end{cases} \tag{2.3}$$

Для анализа решения данной задачи линейного программирования построим двойственную к ней. Для этого припишем двойственные переменные: $\vec{p} \in \mathbb{R}^n$ — вектор цен на производимые в системе товары (произвольного знака, т. к. соответсвует ограничению типа равенства); $s \geqslant 0$ — единая для всех ставка заработной платы (положительна, т. к. соответствует ограничению типа неравенства). Функция Лагранжа для З. Л. П. (2.3) имеет вид

$$\mathscr{L}(\vec{x}, \vec{\omega}, \vec{p}, s) = \vec{\pi}\vec{\omega} + \langle \vec{p}, \vec{x} - A\vec{x} - \vec{\omega} \rangle + s(R - \vec{c}\vec{x}).$$

Перегруппировав слагаемые, получим функцию Лагранжа двойственной задачи:

$$\mathscr{L}(\vec{x}, \vec{\omega}, \vec{p}, s) = sR + \langle \vec{x}, \vec{p} - A^{\mathrm{T}}\vec{p} - s\vec{c} \rangle + \langle \vec{\omega}, \vec{\pi} - \vec{p} \rangle.$$

Таким образом, сама двойственная к (2.3) задача имеет вид:

$$\begin{cases} sR \to \min \\ \vec{p} = A^{\mathrm{T}}\vec{p} + s\vec{c} \\ \vec{p} \geqslant \vec{\pi} \\ s \geqslant 0 \end{cases} \tag{2.4}$$

Перепишем ограничение на цены в двойственной задаче покоординатно:

$$p_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ji} p_j + s c_i, \; i = \overline{1, n}. \tag{2.5}$$

Равенство (2.5) означает, что цена единицы продукта i-й отрасли складывается из затрат на сырье и стоимости трудовых ресурсов, необходимых для производства единицы продукта.

Согласно теореме 1' главы 1 в силу продуктивности матрицы (а следовательно и матрицы A^{T}) матрица $(E - A^{\mathrm{T}})$ неотрицательно обратима. Тогда ограничение (2.5) можно переписать в виде:

$$\vec{p} = (E - A^{\mathrm{T}})^{-1} s\vec{c}$$

Введем вектор полных трудовых затрат

$$\begin{aligned} \vec{c}^{*} &\overset{\circ}{=} (E - A^{\mathrm{T}})^{-1}\vec{c} = \text{ по теореме 2 главы 1} \\ &= \vec{c} + A^{\mathrm{T}}\vec{c} + (A^{\mathrm{T}})^2\vec{c} + \ldots + (A^{\mathrm{T}})^k\vec{c} + \ldots \end{aligned}$$

таким образом,

$$\vec{p} = s\vec{c}^{*}. \tag{2.6}$$

Соотношение (2.6) называют *основным соотношением трудовой теории стоимости*. Оно означает, что цена на продукцию каждой отрасли пропорциональна полным трудовым затратам, причем коэффициент пропорциональности s есть величина постоянная, не зависящая от отрасли. Соотношение (2.6) также пишут в виде

$$\frac{p_i}{p_j} = \frac{c_i^*}{c_j^*}, \; i, j = \overline{1, n}.$$

Выделим двух экономических агентов — народное хозяйство и общество. Рассмотрим схему финансовых потоков между ними.

Согласно теореме 1, если З. Л. П. (2.3) и З. Л. П. (2.4) имеют решения, то

$$\vec{\pi}\vec{\omega} = sR. \tag{2.7}$$

Условия дополняющей нежесткости для З. Л. П. (2.3) и З. Л. П. (2.4)

$$\vec{\pi}\vec{\omega} = \vec{p}\vec{\omega}; \tag{2.8}$$

$$sR = s\vec{c}\vec{x}. \tag{2.9}$$

Тогда, с учетом условий (2.7) — (2.9) основной финансовый баланс имеет вид:

$$\vec{p}\vec{\omega} = s\vec{c}\vec{x}.$$

Из ограничения $\vec{p} \geqslant \vec{\pi}$ двойственной задачи (2.4) и основного соотношения трудовой стоимости (2.6) вытекает, что

$$s\vec{c}^* \geqslant \vec{\pi}.$$

С учетом условия доп. нежесткости (2.9) при $\omega_i > 0$

$$sc_i^* = \pi_i,$$

следовательно, экономически обоснованной является ставка заработной платы

$$s = \max_{j=\overline{1,n}} \left(\frac{\pi_j}{c_j^*} \right)$$

Таким образом, в рассматриваемых условиях фактически оказывается выгодным производство единственного товара из существующей номенклатуры. Отбор такого товара определяется мировыми ценами. Примерами являются так называемые «банановые» и «кофейные» республики.

Упражнение. Рассмотреть эту же задачу, только в качестве целевого функционала брать $U(\vec{\omega}) \in \Phi \to \max$.

Пример 2. «Доиндустриальный капитализм». Рассмотрим замкнутую экономику при тех же предположениях и обозначениях, что и в примере выше. Только теперь не будем считать производимые товары взаимозаменяемыми (например, такие товары как одежда, питание, жилье друг друга не заменяют). Введем структуру потребления (потребительский комплект) $\vec{K} = (K_1, \ldots, K_n)$. Обозначим через η количество производимых в системе потребительских комплектов. С увеличением η повышается уровень жизни. Через π будем обозначать меру «удовлетворения», которую получает потребитель от одного комплекта. Ставится задача максимизации уровня жизни в системе:

$$\begin{cases} \pi\eta \to \max \\ \vec{x} = A\vec{x} + \vec{\omega} \\ \vec{\omega} \geqslant \eta\vec{K} \\ \vec{c}\vec{x} \leqslant R \\ \eta \geqslant 0 \end{cases}$$

Ее можно переписать в эквивалентном виде, избавившись от вектора конечных выпусков $\vec{\omega}$:

$$\begin{cases} \pi\eta \to \max \\ \vec{x} \geqslant A\vec{x} + \eta\vec{K} & |\vec{p} \geqslant 0 \\ \vec{c}\vec{x} \leqslant R & |s \geqslant 0 \\ \eta \geqslant 0 \end{cases} \tag{2.10}$$

Построим двойственную к З. Л. П. (2.10) задачу. Для этого припишем двойственные переменные к ограничениям, в соответсвтии с их типом: $\vec{p} \geqslant 0, \ s \geqslant 0$. Они как и ранее обозначают вектор цен и единую ставку заработной платы соответсвенно. Функция Лагранжа для З. Л. П. (2.10) имеет вид

$$\mathscr{L}(\vec{x}, \eta, \vec{p}, s) = \pi\eta + \langle \vec{p}, \vec{x} - A\vec{x} - \eta\vec{K} \rangle + s(R - \vec{c}\vec{x}).$$

Перегруппировав слагаемые получим функцию Лагранжа двойственной задачи:

$$\mathscr{L}(\vec{x}, \eta, \vec{p}, s) = sR + \langle \vec{x}, \vec{p} - A^{\mathrm{T}}\vec{p} - s\vec{c} \rangle + \eta(\pi - \vec{p}\vec{K}).$$

Таким образом, двойственная к З. Л. П. (2.10) задача имеет вид (ограничение $\vec{p} \geqslant 0$ выполняется автоматически в силу продуктивности матрицы A)

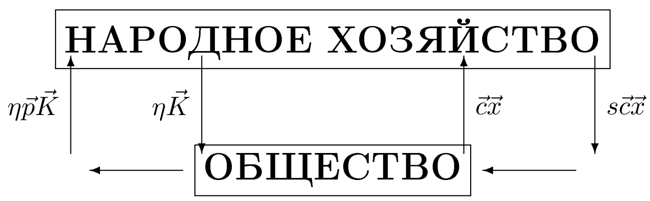
$$\begin{cases} sR \to \min \\ \vec{p} = A^{\mathrm{T}}\vec{p} + s\vec{c} \\ \vec{p}\vec{K} \geqslant \pi \\ s \geqslant 0 \end{cases} \tag{2.11}$$

Как и в примере 1, можно показать выполнимость основного соотношения трудовой теории стоимости (в тех же обозначениях):

$$\vec{p} = s\vec{c}^{*},$$

которое по-прежнему означает постоянство (вне зависимости от отрасли) соотношения цены продукта и полных трудовых затрат на его производство.

Опять же выделем двух экономических агентов (народное хозяйство и общество) и рассмотрим схему финансовых и материальных потоков между ними:



По теореме 1, если З. Л. П. (2.10) и З. Л. П. (2.11) имеют решения, то

$$\pi\eta = sR. \tag{2.12}$$

Условия дополняющей нежесткости для З. Л. П. (2.10) и З. Л. П. (2.11)

$$s(R - \vec{c}\vec{x}) = 0; \tag{2.13}$$

$$\eta(\pi - \vec{p}\vec{K}) = 0 \tag{2.14}$$

$$\langle \vec{p}, \vec{x} - A\vec{x} - \eta\vec{K} \rangle = 0$$

Тогда, с учетом условий (2.12) — (2.14) основной финансовый баланс имеет вид:

$$\eta\vec{p}\vec{K} = s\vec{c}\vec{x}.$$

Рассмотренная выше модель замкнутой экономики капиталистического государства схематично описывает экономику европейских стран первой половины XIX-го века.

Пример 3. «Индустриализация». Промышленная революция второй половины XIX-го века привела к частичному замещению человеческого труда механическим, в силу чего в производстве возник новый лимитирующий фактор — объем основных фондов Φ. Таким образом, в описанной в примере 2 модели, к ограничениям по трудовым ресурсам добавляется новый вид ограничений — ограничения по основным фондам. Пусть $\vec{b} = (b_1, \ldots, b_n)$ — вектор фондоемкостей, где b_i есть количество основных фондов, необходимых для производства единицы продукции в i-й отрасли, тогда ограничения по основным фондам имеет вид

$$\vec{b}\vec{x} \leqslant \Phi.$$

Задача максимизации уровня жизни принимает вид

$$\begin{cases} \pi\eta \to \max \\ \vec{x} \geqslant A\vec{x} + \eta\vec{K} & |\vec{p} \geqslant 0 \\ \vec{c}\vec{x} \leqslant R & |s \geqslant 0 \\ \vec{b}\vec{x} \leqslant \Phi & |r \geqslant 0 \\ \eta \geqslant 0 \end{cases} \tag{2.15}$$

Построим двойственную к З. Л. П. (2.15) задачу. Припишем к ограничениям двойственные переменные с учетом типа ограничений. Как и раньше $\vec{p} \geqslant 0$, $s \geqslant 0$ — вектор цен на производимую продукцию и единая ставка заработной платы соответственно. Новая двойственная переменная к ограничению по основным фондам $r \geqslant 0$ — арендная плата за эксплуатацию основных фондов. Функция Лагранжа для З. Л. П. (2.15) имеет вид

$$\mathscr{L}(\vec{x}, \eta, \vec{p}, s, r) = \pi\eta + \langle \vec{p}, \vec{x} - A\vec{x} - \eta\vec{K} \rangle + s(R - \vec{c}\vec{x}) + r(\Phi - \vec{b}\vec{x}).$$

Перегруппировав слагаемые, получим функцию Лагранжа двойственной задачи:

$$\mathscr{L}(\vec{x}, \eta, \vec{p}, s, r) = sR + r\Phi + \langle \vec{x}, \vec{p} - A^{\mathrm{T}}\vec{p} - s\vec{c} - r\vec{b} \rangle + \eta(\pi - \vec{p}\vec{K}).$$

Таким образом, сама двойственная к З. Л. П. (2.15) задача имеет вид:

$$
\begin{cases}
sR + r\Phi \to \min \\
\vec{p} = A^{\mathrm{T}}\vec{p} + s\vec{c} + r\vec{b} \\
\vec{c}\vec{x} \leqslant R \\
\vec{p}\vec{K} \geqslant \pi \\
s \geqslant 0 \\
r \geqslant 0
\end{cases}
\tag{2.16}
$$

Повторяя цепочку рассуждений, приведенную в примере 1, получаем из продуктивности матрицы A и ограничения на цены в двойственной задаче

$$\vec{p} = s(E - A^{\mathrm{T}})^{-1}\vec{c} + r(E - A^{\mathrm{T}})^{-1}\vec{b}.$$

Таким образом, в З. Л. П. (2.16) ограничение $\vec{p} \geqslant 0$ выполняется автоматически.

Введем вектор полных фондоемкостей $\vec{b}^{*} = (E - A^{\mathrm{T}})^{-1}\vec{b}$. Тогда основное соотношение трудовой теории стоимости примет вид

$$\vec{p} = s\vec{c}^{*} + r\vec{b}^{*}.$$

Согласно теореме двойственности оптимальные значения функционалов прямой (2.15) и двойственной (2.16) задач совпадают:

$$\pi\eta = sR + r\Phi.$$

С учетом условий дополняющей нежесткости

$$s(R - \vec{c}\vec{x}) = 0;$$

$$\langle \vec{p}, \vec{x} - A\vec{x} - \eta\vec{K} \rangle = 0;$$

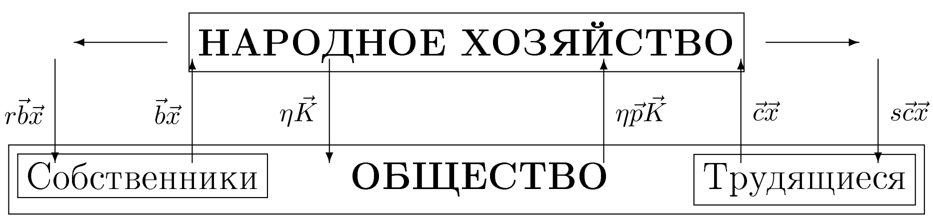
$$\eta(\pi - \vec{p}\vec{K}) = 0$$

$$r(\Phi - \vec{b}\vec{x}) = 0.$$

получим основной финансовый баланс

$$\underline{\eta\vec{p}\vec{K}} = \pi\eta = sR + r\Phi = \underline{s\vec{c}\vec{x} + r\vec{b}\vec{x}} \tag{2.17}$$

— суммарные доходы народного хозяйства равны суммарным расходам. Рассмотрим схему финансовых потоков:



Таким образом, возникновение основных фондов фактически привело к разделению общества на два класса — класс собственников и класс трудящихся. Собственники поставляют народному хозяйству основные фонды, а трудящиеся — рабочую силу. Однако обратный поток продукта в рассматриваемой системе оказывается не распределенным между классами общества (см. (2.17)). Данная система является относительно неустойчивой и не может просуществовать долго. Что нужно изменить в постановке задачи, чтобы разделить финансовый поток регулярным образом? Есть два варианта: первый, наиболее реалистичный, — экономообразователем являются собственники. Второй вариант соотвтествует идеям анархизма — трудящиеся берут организацию экономики в свои руки. Утопичность и несостоятельность последнего подтверждает пример махновщины[2].

Пример 4. «Индустриальный капитализм». Будем придерживаться реалистичного сценария разрешения межклассового конфликта в примере 3 — собственники производства, владеющие капиталом являются организаторами экономической деятельности. С усовершенствованием технических средств, усложняется их эксплуатация и у собственников возникает необходимость в квалифицированных трудовых ресурсах для постоянного обслуживания основных фондов. Собственник заинтересован в максимизации своего уровня жизни, который измеряется структурой его потребления $\vec{K} = (K_1, \ldots, K_n)$. Квалифицированный труд вытесняет неквалифицированный в конкурентной борьбе. Таким образом, совокупный неквалифицированный труд R, занятый в производстве, является уже не экзогенной постоянной, а эндогенной переменной задачи. Реальная заработная плата становится основообразующим фактором структуры потребления трудящихся $\vec{\gamma} = (\gamma_1, \ldots, \gamma_n)$, вообще говоря отличающейся от $\vec{K}$. Учитывая все эти изменения, получаем следующую задачу максимизации (ограничение $\vec{x} \geqslant 0$ выполняется автоматически из продуктивности матрицы A):

$$\begin{cases} \pi\eta \to \max \\ \vec{x} \geqslant A\vec{x} + \eta\vec{K} + R\vec{\gamma} & |\vec{p} \geqslant 0 \\ \vec{c}\vec{x} \leqslant R & |s \geqslant 0 \\ \vec{b}\vec{x} \leqslant \Phi & |r \geqslant 0 \\ \eta \geqslant 0 \\ R \geqslant 0 \end{cases} \tag{2.18}$$

Построим двойственную к З. Л. П. (2.18) задачу. Припишем двойственые пере-

[2] Махновщина — территория Украины в 1919-1921 гг., на которой пытались создать анархическое общество на волне крестьянского движения, возглавляемого Нестором Махно. Причиной поражения махновцев стали некомпетентность рабочих и крестьян в делах самоуправления и нежелание ведения долгосрочной войны с большевиками. Поэтому, когда последние частично пошли на уступки (ослабили репрессии и перестали отбирать у крестьян произведенную продукцию (1921 г.)), большинство махновцев отказалось от идеи самоуправления через народные собрания и покинули ряды своего полевого командира.

менные к ограничениям с учетом их типа. Здесь они такие же, как и в примере 3: $\vec{p} \geqslant 0$, $s \geqslant 0$, $r \geqslant 0$ — вектор цен, единая ставка заработной платы и арендная плата. Функция Лагранжа для З. Л. П. (2.18):

$$\mathscr{L}(\vec{x}, \eta, R, \vec{p}, s, r) = \pi\eta + \langle \vec{p}, \vec{x} - A\vec{x} - \eta\vec{K} - R\gamma \rangle + s(R - \vec{c}\vec{x}) + r(\Phi - \vec{b}\vec{x}).$$

Перегруппируем слагаемые и получим функцию Лагранжа двойственной задачи:

$$\mathscr{L}(\vec{x}, \eta, R, \vec{p}, s, r) = r\Phi + \langle \vec{x}, \vec{p} - A^{\mathrm{T}}\vec{p} - s\vec{c} - r\vec{b} \rangle + \eta(\pi - \vec{p}\vec{K}) + R(s - \vec{p}\vec{\gamma}).$$

В итоге, сама двойственная к З. Л. П. (2.18) задача имеет вид:

$$\begin{cases} r\Phi \to \min \\ \vec{p} = A^{\mathrm{T}}\vec{p} + s\vec{c} + r\vec{b} \\ \vec{p}\vec{K} \geqslant \pi \\ \vec{p}\vec{\gamma} \geqslant s \\ s \geqslant 0 \\ r \geqslant 0 \end{cases} \tag{2.19}$$

Оптимальные значения функционалов в прямой и двойственной задачах совпадают:

$$\pi\eta = r\Phi. \tag{2.20}$$

Условия дополняющей нежесткости:

$$\langle \vec{p}, \vec{x} - A\vec{x} - \eta\vec{K} - R\gamma \rangle = 0;$$

$$s(R - \vec{c}\vec{x}) = 0; \tag{2.21}$$

$$\eta(\pi - \vec{p}\vec{K}) = 0; \tag{2.22}$$

$$r(\Phi - \vec{b}\vec{x}) = 0; \tag{2.23}$$

$$R(s - \vec{p}\vec{\gamma}) = 0. \tag{2.24}$$

т. е. финансовые потоки расщепились и мы можем написать балансы расходов и доходов для собственников

$$r\vec{b}\vec{x} \overset{(2.23)}{=} r\Phi \overset{(2.20)}{=} \pi\eta \overset{(2.22)}{=} \eta\vec{p}\vec{K},$$

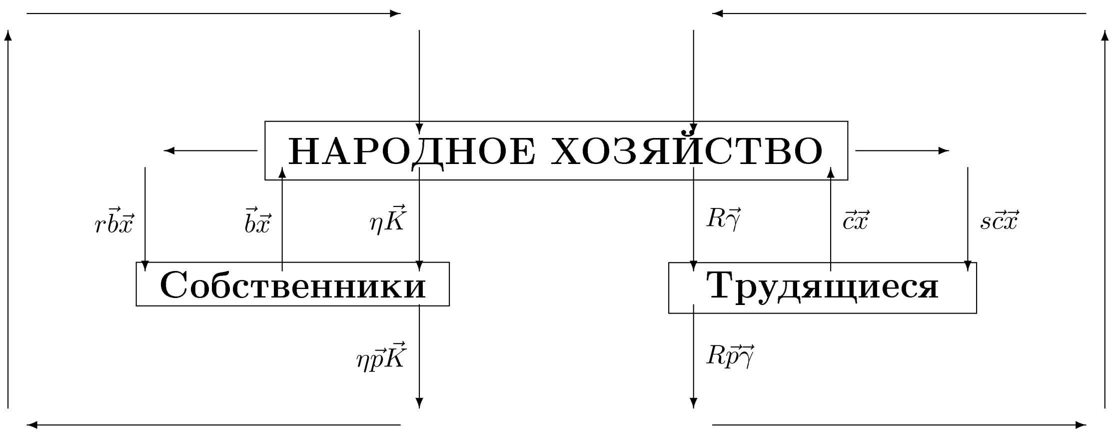
и для трудящихся

$$s\vec{c}\vec{x} \overset{(2.21)}{=} sR \overset{(2.24)}{=} R\vec{p}\vec{\gamma}.$$

Основной же финансовый баланс народного хозяйства примет вид

$$r\vec{b}\vec{x} + s\vec{c}\vec{x} = \eta\vec{p}\vec{K} + R\vec{p}\vec{\gamma}.$$

Распределение финансовых потоков происходит следующим образом:



Из ограничения на цены в двойственной задаче, с учетом старых обозначений ($\vec{c}^* = (E - A^{\mathrm{T}})^{-1}\vec{c}$ — вектор полных трудоемкостей, $\vec{b}^* = (E - A^{\mathrm{T}})^{-1}\vec{b}$ — вектор полных фондоемкостей), получаем

$$\vec{p} = s\vec{c}^* + r\vec{b}^*. \tag{2.25}$$

Неотрицательность векторов $\vec{b}^*$ и $\vec{c}^*$ является необходимым условием продуктивности системы (в том плане, что вектор валовых выпусков $\vec{x} \geqslant 0,\ \vec{x} \neq 0$). Кроме того, по условию, вектор трудоемкостей $\vec{c} > 0$ (см. пример 1). Тогда из ограничения $\vec{c}\vec{x} \leqslant R$ следует, что $R > 0$. А это, с учетом (2.24), приводит к

$$s = \vec{p}\vec{\gamma}.$$

Домножив (2.25) скалярно на $\vec{\gamma}$, получим

$$s = s\langle \vec{c}^*, \vec{\gamma}\rangle + r\langle \vec{b}^*, \vec{\gamma}\rangle,$$

откуда

$$r = s\frac{1 - \langle \vec{c}^*, \vec{\gamma}\rangle}{\langle \vec{b}^*, \vec{\gamma}\rangle}.$$

Последнее равенство дает еще одно необходимое условие продуктивности системы. При наличии основных фондов ($\Phi > 0$) ставка арендной платы r за пользование фондами больше нуля, если затраты труда на возобновление единицы рабочей силы не превосходят производительности этой единицы, т. е. выполняется неравенство

$$1 \geqslant \langle \vec{c}^*, \vec{\gamma}\rangle,$$

также называемое *условием экономической эффективности.* Если $\vec{\gamma}$ слишком большое, происходит lockout. Основное соотношение трудовой теории стоимости модифицировалось:

$$\vec{p} = s\left(\vec{c}^* + \frac{1 - \langle \vec{c}^*, \vec{\gamma}\rangle}{\langle \vec{b}^*, \vec{\gamma}\rangle}\vec{b}^*\right).$$

Что изменилось в 00-х относительно 90-х? После 90-х $\vec{\gamma}$ было очень завышено, что привело к гиперинфляции. К началу 00-х успел сформироваться потребительский рынок и резко упал уровень жизни. Как следствие, упало и $\vec{\gamma}$, после чего инфляция стабилизировалась (около 7% ВВП в год).

Пример 5. «Неоколониальная экономика». Либерализация после распада СССР привела к расслоению общества, в том числе выделился слой экспортно-импортной доходности. Организаторы экономической деятельности были заинтересованы в зарабатывании денег, которые намеревались тратить за рубежом. Таким образом, весь продукт, не задействованный в производстве и в распределении между членами привилегированного класса собственников, вывозился.

Итак, рассмотрим пример, схематично описывающий ситуацию выше. Обозначим через $\vec{\pi} = (\pi_1, \dots, \pi_n) > 0$ — вектор мировых цен на экспортируемые и импортируемые товары, а через $\vec{\omega} = (\omega_1, \dots, \omega_n)$ — сальдо экспорта и импорта. Прибыль от экспортно-импортных операций будет определяться величиной $\vec{\pi}\vec{\omega}$. Как и в предыдущих примерах, будем считать, что внутренне потребление продукта (с учетом импорта) осуществляется комплектами, определяемыми структурой $\vec{\gamma} = (\gamma_1, \dots, \gamma_n) \geqslant 0$.. Таким образом, на конечное потребление расходуется произведенный внутри страны и импортированный продукт в объеме $R\vec{\gamma}$, где $R \geqslant 0$ — суммарное количество трудовых ресурсов в системе. Весь нераспределенный продукт экспортируется. Правящая элита заинтересована в максимальном вывозе капитала. То есть, перед ними стояла следующая задача максимизации валютной выручки

$$\begin{cases} \vec{\pi}\vec{\omega} \to \max \\ \vec{x} = A\vec{x} + R\vec{\gamma} + \vec{\omega} & |\vec{p} \\ \vec{c}\vec{x} \leqslant R & |s \geqslant 0 \\ \vec{b}\vec{x} \leqslant \Phi & |r \geqslant 0 \\ R \geqslant 0 \\ \vec{x} \geqslant 0 \end{cases} \tag{2.26}$$

Припишем двойственные переменные ограничениям З. Л. П. (2.26) в соответствии с их типом. Здесь, как и ранее, $\vec{p}$ — вектор цен на производимую продукцию, $s \geqslant 0$ — ставка заработной платы, $r \geqslant 0$ — арендная плата за пользование основными фондами. Функция Лагранжа для З. Л. П. (2.26) имеет вид

$$\mathscr{L}(\vec{x}, R, \vec{\omega}, \vec{p}, s, r) = \vec{\pi}\vec{\omega} + \langle \vec{p}, \vec{x} - A\vec{x} - R\vec{\gamma} - \vec{\omega} \rangle + s(R - \vec{c}\vec{x}) + r(\Phi - \vec{b}\vec{x}).$$

Перегруппировка слагаемых дает функцию Лагранжа двойственной к З. Л. П. (2.26) задачи

$$\mathscr{L}(\vec{x}, R, \vec{\omega}, \vec{p}, s, r) = r\Phi + \langle \vec{x}, \vec{p} - A^{\mathrm{T}}\vec{p} - s\vec{c} - r\vec{b} \rangle + R(\vec{c} - \vec{p}\vec{\gamma}) + \langle \vec{\omega}, \vec{\pi} - \vec{p} \rangle.$$

Следовательно, сама двойственная к З. Л. П. (2.26) задача имеет вид

$$
\begin{cases}
r\Phi \to \min \\
\vec{p} \leqslant A^{\mathrm{T}}\vec{p} + s\vec{c} + r\vec{b} \\
\vec{p}\vec{\gamma} \geqslant s \\
\vec{p} = \vec{\pi} \\
r \geqslant 0 \\
s \geqslant 0
\end{cases}
\tag{2.27}
$$

Исходная система ограничений задачи совместна при условии отсутствия транзакционных издержек (т. е. мировые и внутренние цены совпадают $\vec{p} = \vec{\pi}$). С учетом этого, ограничение $\vec{p} \leqslant A^{\mathrm{T}}\vec{p} + s\vec{c} + r\vec{b}$ можно переписать в мировых ценах

$$\vec{\pi} \leqslant A^{\mathrm{T}}\vec{\pi} + s\vec{c} + r\vec{b}. \tag{2.28}$$

Как и в примере 4, условие продуктивности системы означает ненулевой выпуск хотя бы одного товара из номенклатуры $\vec{x} \geqslant 0,\ \vec{x} \neq 0$. При условии положительности вектора трудоемкостей $\vec{c} > 0$ из ограничения $\vec{c}\vec{x} \leqslant R$ получим, что $R > 0$. Тогда, в силу условий дополняющей нежесткости

$$s = \vec{\pi}\vec{\gamma},$$

и, согласно (2.28), имеем

$$\vec{\pi} \leqslant A^{\mathrm{T}}\vec{\pi} + \langle\vec{\pi}, \vec{\gamma}\rangle\vec{c} + r\vec{b}. \tag{2.29}$$

Учитывая(2.29), из условия дополняющей нежесткости

$$\langle\vec{x}, \vec{\pi} - A^{\mathrm{T}}\vec{\pi} - s\vec{c} - r\vec{b}\rangle = 0$$

получим

$$\pi_i \leqslant [A^{\mathrm{T}}\vec{\pi}]_i + \langle\vec{\pi}, \vec{\gamma}\rangle c_i + rb_i,\ i = \overline{1, n}.$$

причем для всех i таких, что $x_i > 0$ выполнено

$$\pi_i = [A^{\mathrm{T}}\vec{\pi}]_i + \langle\vec{\pi}, \vec{\gamma}\rangle c_i + rb_i$$

Следовательно, при условии ненулевого объема производства хотя бы одного продукта $\vec{x} \geqslant 0,\ \vec{x} \neq 0$

$$r = \max_i \frac{\pi_i - [A^{\mathrm{T}}\vec{\pi}]_i - \langle\vec{\pi}, \vec{\gamma}\rangle c_i}{b_i}.$$

Последнее равенство соответствует дополнительному условию экономической продуктивности системы, которое можно интерпретировать как рентабельность производства в мировых ценах

$$\max_i \left(\pi_i - [A^{\mathrm{T}}\vec{\pi}]_i - \langle\vec{\pi}, \vec{\gamma}\rangle c_i\right) > 0.$$

Условие рентабельности производства в мировых ценах означает, что экономически оправданным является производство только прибыльной на внешнем рынке группы товаров. Напомним, что отбор такой группы товаров уже наблюдался в примере 1, описывающем колониальную экономику доиндустриальной эпохи. Таким образом, несмотря на развитую промышленность, в примере 5 происходит возврат к правилам экономического регулирования, характерным для государств с аграрно-сырьевой ориентацией экономики до индустриального периода.

Все пять приведенных примеров являются отражением вульгарной кинетической теории[3]. Однако такой подход к моделированию экономических систем не всегда может в достаточной мере описать все механизмы взаимодействий, происходящих между агентами реальной системы. Взять, например, класс олигархов, появившийся при распаде СССР и так же быстро «исчезнувший». Изначально олигарх формировал правила экономической игры удобным ему образом и достигал поставленных целей за счет непрозрачных отношений с властью. Появление такого класса привело к концентрации собственности и доходов в узком кругу людей. Они обладали бо́льшими правами на собственность, чем собственники до 90-х годов, однако не всеми, которыми хотелось. Желание расширить свод прав уничтожило олигархов как класс, так как оно привело к прозрачным отношениям с властью. Эта ситуация не была промоделирована.

2.3 Декомпозиционные свойства цен и множителей Лагранжа.

Потребитель, решая что ему купить, довольствуется незначительной информацией о товаре, и чаще всего ориентируется лишь на цены. Экономическая жизнь так устроена (почему? — другой вопрос), что цены хорошо декомпозируют.

Не будем рассматривать декомпозиционные свойства решений задач оптимизации — это отдельная тема, достойная внимания. Мы будем рассматривать лишь декомпозиционные свойства цен и множителей Лагранжа, посредством следующего примера взаимодействия отдельных подсистем.

Пусть $t = 1, \ldots, m$ обозначает регионы. Тогда
$\vec{x}(t)$ — вектор валовых выпусков в регионе t;
$\vec{\omega}(t)$ — вектор конечных выпусков в регионе t;
$\eta(t)$ — уровень жизни в регионе t;
$A(t)$ — матрица Леонтьева прямых затрат в регионе t;
$\vec{b}(t)$ — вектор фондоемкостей в регионе t;
$\vec{c}(t)$ — вектор ресурсоемкостей в регионе t;

[3]Вульгарная кинтеическая теория — теория, берущая начало в XIX-м веке, качественно объясняющая механизмы общественного экономического взаимодействия, целью которой была апология продвигаемого буржуазией капитализма.

$\vec{K}(t)$ — структура потребления в регионе t;

$\Phi(t)$ — совокупный объем фондов в регионе t;

$\pi(t)$ — приоритет (важность) региона t;

R — суммарное количество ресурсов в системе.

Будем считать, что есть один закрепленный первичный ресурс (типа заводов и прочей недвижимости и т. д.) и свободный ресурс (типа электроэнергии, трудовых ресурсов[4] и т. д.). Имеем следующую оптимизационную задачу (как и ранее, ограничение $\vec{x}(t) \geqslant 0,\ t = \overline{1,m}$ выполняется автоматически из продуктивности матрицы $A(t)$)

$$\begin{cases} \sum\limits_{t=1}^{m} \pi(t)\eta(t) \to \max \\ \vec{x}(t) \geqslant A(t)\vec{x}(t) + \eta(t)\vec{K}(t),\ t = \overline{1,m} & |\vec{p}(t) \geqslant 0 \\ \vec{b}(t)\vec{x}(t) \leqslant \Phi(t),\ t = \overline{1,m} & |r(t) \geqslant 0 \\ \sum\limits_{t=1}^{m} \vec{c}(t)\vec{x}(t) \leqslant R & |s \geqslant 0 \\ \eta \geqslant 0 \end{cases} \tag{2.30}$$

Построим двойственную задачу. Припишем к ограничениям прямой задачи (2.30) с учетом их типа двойственные переменные: $\vec{p}(t) \geqslant 0$ — вектор цен на внутреннюю продукцию региона t, $r(t) \geqslant 0$ — ставка арендной платы за пользование фондами в регионе t, $s \geqslant 0$ — единая для всех регионов ставка заработной платы. Функция Лагранжа для З. Л. П. (2.30) имеет вид

$$\mathscr{L}\big(\{\vec{x}(t), \eta(t) \mid t = 1, \dots, m\}, \{\vec{p}(t), r(t) \mid t = 1, \dots, m\}, s\big) =$$
$$= \sum_{t=1}^{m} \Big\{\pi(t)\eta(t) + \langle \vec{p}(t), \vec{x}(t) - A(t)\vec{x}(t) - \eta(t)\vec{K}(t)\rangle + r(t)\left(\Phi(t) - \vec{b}(t)\vec{x}(t)\right)\Big\} +$$
$$+ s\left(R - \sum_{t=1}^{m} \vec{c}(t)\vec{x}(t)\right)$$

Перегруппировав слагаемые, получаем функцию Лагранжа двойственной к

[4] В США труд является свободным ресурсом, однако, к примеру, в Финляндии это не так — в этой стране труд привязан к месту.

З. Л. П. (2.30) задачи

$$
\begin{aligned}
&\mathscr{L}\big(\{\vec{x}(t),\eta(t)\mid t=1,\dots,m\},\{\vec{p}(t),r(t)\mid t=1,\dots,m\},s\big)=\\
&=sR+\sum_{t=1}^{m}r(t)\Phi(t)+\\
&+\sum_{t=1}^{m}\Big\{\big\langle\vec{x}(t),\vec{p}(t)-A^{\mathrm{T}}(t)\vec{p}(t)-r(t)\vec{b}(t)-s\vec{c}(t)\big\rangle+\eta(t)\Big(\pi(t)-\vec{p}(t)\vec{K}(t)\Big)\Big\}.
\end{aligned}
$$

Таким образом, двойственная к З. Л. П. (2.30) задача имеет вид

$$
\begin{cases}
sR+\sum\limits_{t=1}^{m}r(t)\Phi(t)\to\min\\
\vec{p}(t)=A^{\mathrm{T}}(t)\vec{p}(t)+r(t)\vec{b}(t)+s\vec{c}(t),\ t=\overline{1,m}\\
\vec{p}(t)\vec{K}(t)\geqslant\pi(t),\ t=\overline{1,m}\\
r(t)\geqslant 0,\ t=\overline{1,m}\\
s\geqslant 0
\end{cases}
\tag{2.31}
$$

причем ограничение $\vec{p}(t)\geqslant 0,\ t=\overline{1,m}$ опять же выполняется автоматически в силу продуктивности матрицы A.

Выпишем условия дополняющей нежесткости

$$
\big\langle\vec{p}(t),\vec{x}(t)-A(t)\vec{x}(t)-\eta(t)\vec{K}(t)\big\rangle=0,\ t=\overline{1,m};\tag{2.32}
$$

$$
r(t)\Big(\Phi(t)-\vec{b}(t)\vec{x}(t)\Big)=0,\ t=\overline{1,m};\tag{2.33}
$$

$$
s\left(R-\sum_{t=1}^{m}\vec{c}(t)\vec{x}(t)\right)=0;
$$

$$
\eta(t)\Big(\pi(t)-\vec{p}(t)\vec{K}(t)\Big)=0,\ t=\overline{1,m}.\tag{2.34}
$$

Оказывается решение З. Л. П. (2.30) может быть декомпозировано на m подзадач, для каждой из которых важен параметр s^*, отвечающий за информацию о заработной плате в других регионах (равновесная ставка заработной платы), и непосредственные параметры данного региона. Об этом говорит следующее предложение.

Предложение 2. *Пусть* $\{\vec{x}^*(t),\ \eta^*(t)\mid t=1,\dots,m\}$ *— решение З. Л. П. (2.30), а* $\big(\{\vec{p}^*(t),\ r^*(t)\mid t=1,\dots,m\},s^*\big)$ *— решение двойственной З. Л. П. (2.31),* $1\leqslant$

$\tau \leqslant m$. Тогда $(\vec{x}^*(\tau),\ \eta^*(\tau))$ является решением З. Л. П. (2.35), а $(\vec{p}^*(\tau),\ r^*(\tau))$ — решением З. Л. П. (2.36):

$$\begin{cases} \pi(\tau)\eta(\tau) - s^*\vec{c}(\tau)\vec{x}(\tau) \to \max \\ \vec{x}(\tau) \geqslant A(\tau)\vec{x}(\tau) + \eta(\tau)\vec{K}(\tau) \\ \vec{b}(\tau)\vec{x}(\tau) \leqslant \Phi(\tau) \\ \eta \geqslant 0 \end{cases} \tag{2.35}$$

$$\begin{cases} r(\tau)\Phi(\tau) \to \min \\ \vec{p}(\tau) = A^{\mathrm{T}}(\tau)\vec{p}(\tau) + r(\tau)\vec{b}(\tau) + s^*\vec{c}(\tau) \\ \vec{p}(\tau)\vec{K}(\tau) \geqslant \pi(\tau) \\ r(\tau) \geqslant 0 \end{cases} \tag{2.36}$$

Доказательство. Запишем функции Лагранжа прямой (2.35) и двойственной (2.36) задач:

$$\begin{aligned} &\mathscr{L}\left(\vec{x}(\tau), \eta(\tau), \vec{p}(\tau), r(\tau)\right) = \pi(\tau)\eta(\tau) - s^*\vec{c}(\tau)\vec{x}(\tau) + \\ &+ \left\langle \vec{p}(\tau), \vec{x}(\tau) - A\vec{x}(\tau) - \eta(\tau)\vec{K}(\tau)\right\rangle + r(\tau)\left(\Phi(\tau) - \vec{b}(\tau)\vec{x}(\tau)\right) = \\ &= r(\tau)\Phi(\tau) + \\ &+ \left\langle \vec{x}(\tau), \vec{p}(\tau) - A^{\mathrm{T}}(\tau)\vec{p}(\tau) - s^*\vec{c}(\tau) - r(\tau)\vec{b}(\tau)\right\rangle + \eta(\tau)\left(\pi(\tau) - \vec{p}(\tau)\vec{K}(\tau)\right). \end{aligned}$$

Условия дополняющей нежесткости для этих задач совпадают с (2.32), (2.33) и (2.34) только при $t = \tau$. Далее пользуемся критерием оптимальности в форме условий дополняющей нежесткости (теорема 2). Ограничения в задаче (2.35) выполняются, т. к. взяты из задачи (2.30); в задаче (2.36) выполняются, т. к. взяты из задачи (2.31). Значит, в силу достаточности, $(\vec{x}^*(\tau),\ \eta^*(\tau))$ является решением З. Л. П. (2.35), а $(\vec{p}^*(\tau),\ r^*(\tau))$ — решением З. Л. П. (2.36). ■

Попробуем обратить предложение 2. Допустим, s^* угадано правильно. Решим для каждого $\tau = 1, \ldots, m$ задачи (2.35) и (2.36) и зададимся вопросом, будет ли совокупное решение из τ являться решением задачи (2.30)? Оказывается решение З. Л. П. в данных условиях не единственно (нельзя шевелить условия, не теряя содержательного смысла). Так возникает проблема координации — не из всех решений локальных задач можно составить решение глобальной задачи.

А что происходит в реальной жизни? Либералы скажут, что рынок расставит все таким образом, что решение будет единственно. Однако, это ошибочная точка зрения. Рассмотрим, например, рынок хлеба. В нем у каждого региона существуют свои урожаи и свои пекарни. Тем не менее, движение хлеба по стране имеет место быть. Это решается только рынком? Нет. Для этого существует система торговых домов, которая координирует поставки хлеба по регионам.

2.4 Оценка эффективности новых технологий.

Модифицируем имеющуюся модель так, чтобы разные отрасли могли конкурировать между собой. При этом один и тот же продукт мог выпускаться с использованием разных технологий.

Итак, пусть n — число видов продуктов, m — число технологий. Это значит, что теперь каждая технология выпускает не уникальный продукт. Будем обозначать через $\vec{x} = (x_1, \ldots, x_m)$ интенсивность использования технологий. Пусть $G \in \mathbb{R}^{n\times m}$ — матрица выпусков, тогда $G\vec{x}$ — вектор объемов производства. $A \in \mathbb{R}^{n\times m}$ — матрица прямых затрат, $A\vec{x}$ — вектор производственных затрат. Все остальные обозначения оставим теми же, что и в примерах ранее (см. пример 3). Тогда ставится следующая оптимизационная задача:

$$\begin{cases} \pi\eta \to \max \\ G\vec{x} \geqslant A\vec{x} + \eta\vec{K} & |\vec{p} \geqslant 0 \\ \vec{c}\vec{x} \leqslant R & |s \geqslant 0 \\ \vec{b}\vec{x} \leqslant \Phi & |r \geqslant 0 \\ \eta \geqslant 0 \\ \vec{x} \geqslant 0 \end{cases} \tag{2.37}$$

Введем новую технологию $(\vec{g}_{\text{н}}, \vec{a}_{\text{н}}, b_{\text{н}}, c_{\text{н}})$ характеризующуюся своей интенсивностью использования $x_{\text{н}}$. Задача (2.37) модифицируется в следующую:

$$\begin{cases} \pi\eta \to \max \\ G\vec{x} + x_{\text{н}}\vec{g}_{\text{н}} \geqslant A\vec{x} + x_{\text{н}}\vec{a}_{\text{н}} + \eta\vec{K} \\ \vec{c}\vec{x} + c_{\text{н}}x_{\text{н}} \leqslant R \\ \vec{b}\vec{x} + b_{\text{н}}x_{\text{н}} \leqslant \Phi \\ \eta \geqslant 0 \\ \vec{x} \geqslant 0 \\ x_{\text{н}} \geqslant 0 \end{cases} \tag{2.38}$$

где $A\vec{x} + x_{\text{н}}\vec{a}_{\text{н}} + \eta\vec{K}$ есть совокупный спрос домашних хозяйств на технологии, включая новую.

Ясно, что в задаче (2.38) оптимальное значение функционала меньше, чем в задаче (2.37) быть не может.

Определение 3. Будем говорить, что новая технология $(\vec{g}_{\text{н}}, \vec{a}_{\text{н}}, b_{\text{н}}, c_{\text{н}})$ неэффективна, если оптимальные значения функционалов в З. Л. П. (2.37) и в З. Л. П. (2.38) равны.

Припишем множители Лагранжа к ограничениям З. Л. П. (2.37) с у четом их типа: $\vec{p} \geqslant 0$ — цены товаров, $s \geqslant 0$ — единая ставка заработной платы, $r \geqslant 0$ —

арендная плата за пользование фондами. Функция Лагранжа для З. Л. П. (2.37) имеет вид

$$\mathscr{L}(\vec{x},\eta,\vec{p},r,s) = \pi\eta + \langle\vec{p}, G\vec{x} - A\vec{x} - \eta\vec{K}\rangle + r(\Phi - \vec{b}\vec{x}) + s(R - \vec{c}\vec{x})$$

перегруппировав слагаемые, получим функцию Лагранжа для двойственной к (2.37) задачи:

$$\mathscr{L}(\vec{x},\eta,\vec{p},r,s) = r\Phi + sR + \langle\vec{x}, G^T\vec{p} - A^{\mathrm{T}}\vec{p} - r\vec{b} - s\vec{c}\rangle + \eta(\pi - \vec{p}\vec{K}).$$

Теперь выпишем двойственную к З. Л. П. (2.37) задачу

$$\begin{cases} r\Phi + sR \to \min \\ G^T\vec{p} \leqslant A^{\mathrm{T}}\vec{p} + r\vec{b} + s\vec{c} \\ \vec{p}\vec{K} \geqslant \pi \\ \vec{p} \geqslant 0 \\ r \geqslant 0 \\ s \geqslant 0 \end{cases} \tag{2.39}$$

Предложение 3. *Для того, чтобы новая технология $(\vec{g}_н, \vec{a}_н, b_н, c_н)$ была неэффективна необходимо и достаточно, чтобы существовало решение $(\vec{p}, r, s)$ З. Л. П. (2.39) такое, что*

$$\vec{g}_н\vec{p} \leqslant \vec{a}_н\vec{p} + rb_н + sc_н. \tag{2.40}$$

Замечание. Мы интерпретируем множители Лагранжа как цены, поэтому под $\vec{g}_{\text{н}}\vec{p}$ понимается стоимость продукции при единичной интенсивности новой технологии. Таким образом, условие неэффективности новой технологии (2.40) есть превышение затрат над стоимостью продукции.

Доказательство. Запишем двойственную задачу к расширенной задаче (2.38):

$$\begin{cases} r\Phi + sR \to \min \\ G^T\vec{p} \leqslant A^{\mathrm{T}}\vec{p} + r\vec{b} + s\vec{c} \\ \vec{g}_{\text{н}}\vec{p} \leqslant \vec{a}_{\text{н}}\vec{p} + rb_{\text{н}} + sc_{\text{н}} \\ \vec{p}\vec{K} \geqslant \pi \\ \vec{p} \geqslant 0 \\ r \geqslant 0 \\ s \geqslant 0 \end{cases} \tag{2.41}$$

Теперь воспользуемся теоремой двойственности (теоремой 1), согласно которой оптимальное значение функционала З. Л. П. (2.37) равно оптимальному значению функционала З. Л. П. (2.39), и оптимальное значение функционала З. Л. П. (2.38) равно оптимальному значению функционала З. Л. П. (2.41).

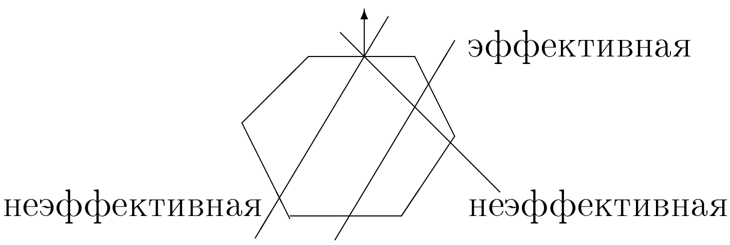
Доказательства необходимости и достаточности очевидны.

Достаточность. Возьмем решение З. Л. П. (2.41). Оно является допустимым в З. Л. П. (2.39) и выполняется ограничение (2.40).

Необходимость. Пусть технология неэффективна. Тогда оптимальные значения фуннкционалов З. Л. П. (2.39) и З. Л. П. (2.41) равны, и соответственно выполняется ограничение (2.40). ■

Вопрос влияния новых технологий на экономическую систему был одним из обсуждаемых в научных кругах с начала XX-го века. Й. Шумпетер придерживался либералистических взглядов в экономике (считал влияние государства на экономические процессы и технологии тлетворным), относился к последователям теории динамики циклов Кондратьева[5], и был одним из первых, кто предложил концепцию технологических укладов, описание которых давало понимание долгосрочных процессов. Одним из результатов такого подхода стало заявление о том, что открытия, в некотором роде, возникают сами по себе, и внедряются они как раз на смену новых технологий.

Замечание. Стоит отметить, что оптимальное решение подобного рода задач не единственно — решение задачи (2.39) соответствует условию (2.40) — полупространству.



Однако, в случае добавления еще одной новой технологии добавится еще одно ограничение, и, таким образом, две технологии могут быть по отдельности неэффективными, а в комбинации образовывать эффективную технологию (см. рис.).

2.5 Экономическая интерпретация принципа максимума в моделях экономического роста.

Конечно же здесь имеется в виду принцип максимума Понтрягина, который можно расценивать как принцип временно́й декомпозиции (разбивание решения

[5] Н. Кондратьев (1920 г.) склеил 250 лет статистики мировой экономики, несмотря на различие экономических и политических укладов, исключив несходящиеся временны́е ряды методом сквозящего среднего, — т. е. самостоятельно выделил тренд. После чего пришел к выводу, что все революции и войны происходят волнами с периодичностью примерно в 50 лет.

динамической задачи на решения простых статических задач, где достигается максимум функции Гамильтона-Понтрягина).

Итак, рассмотрим π-модель (называемую так в честь Петрова А. А. и Иванилова Ю. П., которые ее разработали). Если раньше производственные фонды могли свободно перераспределяться между отраслями (так было в XIX-м веке), то теперь возникает все больше примеров обратного — здания перемещать невозможно, турбины годятся лишь для специфического рода деятельности и т. д. Будем рассматривать простейшую модель, где фонды непередаваемы (нам ее будет достаточно для получения всех важнейших результатов):

$t = 0, \ldots, T-1$ — рассматриваемые моменты времени до горизонта планирования T;

$\vec{\xi}(t) = (\xi_1(t), \ldots, \xi_n(t))$ — вектор производственных мощностей, причем $\vec{\xi}(0) = \vec{\xi}_0 > 0$; соответственно вектор валовых выпусков становится ограничен сверху $\vec{x}(t) \leqslant \vec{\xi}(t)$;

$\vec{\theta}(t)$ — вектор прироста мощностей, т. е. $\vec{\xi}(t+1) = \vec{\xi}(t) + \vec{\theta}(t)$;

$A \in \mathbb{R}^{n \times m}$ — матрица Леонтьева прямых затрат, соответственно $A\vec{x}$ — сырьевой спрос;

$B \in \mathbb{R}^{n \times m}$, $B \geqslant 0$ — матрица приростных фондов, т. е. $B\vec{\theta}(t)$ — затраты, необходимые для прироста мощностей (создания новых мощностей);

$\vec{K}$ — как и в примерах раньше, структура потребления, а $\eta(t)$ — количество потребляемых комплектов; теперь, как и ранее, избавляемся от лишней переменной в постановке задачи $\vec{\omega}(t)$ — вектора конечных выпусков, и учтем ограничение $\vec{\omega}(t) \geqslant \eta(t)\vec{K}$ в ограничении на валовые выпуски: $\vec{x}(t) \geqslant A\vec{x}(t) + B\vec{\theta}(t) + \eta(t)\vec{K}$;

$\vec{c}$ — вектор ресурсоемкостей, $R(t)$ — совокупный объем ресурсов в момент времени t, является эндогенной переменной; естественное ограничение $\vec{c}\vec{x}(t) \leqslant R(t)$;

$\pi(t) = \delta^t$ — уровень «удовлетворения» от потребления, где δ — некий коэффициент дисконтирования, показывающий ценность текущего потребления относительно будущего.

Опять же, вовзращаемся к концепции чистых отраслей (n отраслей, выпускающих однородную продукцию в m регионах). Таким образом, ставится следующая задача максимизации уровня жизни:

$$\begin{cases} \sum\limits_{t=0}^{T-1} \pi(t)\eta(t) \to \max \\ \vec{x}(t) \geqslant A\vec{x}(t) + B\vec{\theta}(t) + \eta(t)\vec{K},\ t = \overline{0, T-1} \\ \vec{x}(t) \leqslant \vec{\xi}(t),\ t = \overline{0, T-1} \\ \vec{c}\vec{x}(t) \leqslant R(t),\ t = \overline{0, T-1} \\ \vec{\xi}(t+1) = \vec{\xi}(t) + \vec{\theta}(t),\ t = \overline{0, T-1} \\ \vec{\xi}(0) = \vec{\xi}_0 \\ \vec{\theta}(t) \geqslant 0,\ t = \overline{0, T-1} \\ \eta(t) \geqslant 0 \end{cases}$$

У этой модели есть дефекты: производимая продукция идет на произведение новых производственных мощностей и на потребление. При этом на конечных итерациях мощности перестают производиться. Для устранения такого рода дефекта можно устремить горизонт планирования в бесконечность, $T \to \infty$. В этом случае выпуски становятся бесконечными наборами векторов. Что при таком предельном переходе произойдет с ценами? Их можно отнормировать, тем самым исключив рост, — придется иметь дело с элементами l_∞. Работать с банаховым пределом (функционалом, зависящим только от «хвоста») мы не готовы. Во избежание этого, поправим задачу: ограничим $\vec{\xi}(T)$ снизу величиной $\vec{\xi}_T$. Если значение $\vec{\xi}_T$ достаточно мало, то переходим к пределу. В противном случае, если $\vec{\xi}_T$ очень большое, задача является несовместной.

$$\begin{cases} \sum\limits_{t=0}^{T-1} \pi(t)\eta(t) \to \max & \\ \vec{x}(t) \geqslant A\vec{x}(t) + B\vec{\theta}(t) + \eta(t)\vec{K},\ t = \overline{0, T-1} & |\vec{p}(t) \geqslant 0 \\ \vec{x}(t) \leqslant \vec{\xi}(t),\ t = \overline{0, T-1} & |\vec{r}(t) \geqslant 0 \\ \vec{c}\vec{x}(t) \leqslant R(t),\ t = \overline{0, T-1} & |s(t) \geqslant 0 \\ \vec{\xi}(t+1) = \vec{\xi}(t) + \vec{\theta}(t),\ t = \overline{0, T-1} & |\vec{\mu}(t+1) \\ \vec{\xi}(0) = \vec{\xi}_0 & |\vec{\mu}(0) \\ \vec{\xi}(T) \geqslant \vec{\xi}_T & |\vec{\mu}_T \geqslant 0 \\ \vec{\theta}(t) \geqslant 0,\ t = \overline{0, T-1} & \\ \eta(t) \geqslant 0 & \end{cases} \tag{2.42}$$

(ограничение $\vec{x}(t) \geqslant 0,\ t = \overline{0, T-1}$ выполняется автоматически из продуктивности матрицы A).

Припишем множители Лагранжа к ограничениям с учетом их типа: $\vec{p}(t) \geqslant 0$ — вектор цен в период времени t; $\vec{r}(t) \geqslant 0$ — арендная плата за использование производственных мощностей; $s(t) \geqslant 0$ — единая ставка заработной платы; $\vec{\mu}(t+1), t = \overline{0, T-1}, \vec{\mu}(0)$ — стоимости производственных мощностей и $\vec{\mu}_T \geqslant 0$. Составим функцию Лагранжа для З. Л. П. (2.42)

$$\begin{aligned}
&\mathscr{L}\big(\{\vec{x}(t), \eta(t), \vec{\theta}(t), \vec{\xi}(t) \mid t = \overline{0, T-1}\}, \vec{\xi}(T),\\
&\{\vec{p}(t), \vec{r}(t), s(t), \vec{\mu}(t) \mid t = \overline{0, T-1}\}, \vec{\mu}(T), \vec{\mu}_T\big) =\\
&= \sum_{t=0}^{T-1} \big\{\pi(t)\eta(t) + \big\langle \vec{p}(t), \vec{x}(t) - A\vec{x}(t) - B\vec{\theta}(t) - \eta(t)\vec{K}(t)\big\rangle + \big\langle \vec{r}(t), \vec{\xi}(t) - \vec{x}(t)\big\rangle +\\
&+ s(t)\left(R(t) - \vec{c}\vec{x}\right) + \big\langle \vec{\mu}(t+1), \vec{\xi}(t) + \vec{\theta}(t) - \vec{\xi}(t+1)\big\rangle\big\} +\\
&+ \big\langle \vec{\mu}(0), \vec{\xi}_0 - \vec{\xi}(0)\big\rangle + \big\langle \vec{\mu}(T), \vec{\xi}(T) - \vec{\xi}_T\big\rangle =
\end{aligned}$$

перегруппируем слагаемые и получим функцию Лагранжа для двойственной к З. Л. П. (2.42) задачи:

$$\begin{aligned}
&= \vec{\mu}(0)\vec{\xi}_0 - \vec{\mu}(T)\vec{\xi}_T + \sum_{t=0}^{T-1} s(t)R(t) + \sum_{t=0}^{T-1} \big\{\big\langle \vec{x}(t), \vec{p}(t) - A^{\mathrm{T}}\vec{p}(t) - s(t)\vec{c} - \vec{r}(t)\big\rangle +\\
&+ \eta(t)(\pi(t) - \vec{p}(t)\vec{K}) + \big\langle \vec{\theta}(t), \vec{\mu}(t+1) - B^T\vec{p}(t)\big\rangle + \big\langle \vec{\xi}(t), \vec{\mu}(t+1) + \vec{r}(t) - \vec{\mu}(t)\big\rangle\big\} +\\
&+ \big\langle \vec{\xi}(T), \vec{\mu}_T - \vec{\mu}(T)\big\rangle.
\end{aligned}$$

Таким образом, сама двойственная к З. Л. П. (2.42) задача имеет вид

$$\begin{cases}
\vec{\mu}(0)\vec{\xi}_0 - \vec{\mu}(T)\vec{\xi}_T + \sum\limits_{t=0}^{T-1} s(t)R(t) \to \min\\
\vec{p}(t) = A^{\mathrm{T}}\vec{p}(t) + s(t)\vec{c} + \vec{r}(t)\\
\vec{p}(t)\vec{K} \geqslant \pi(t),\ t = \overline{0, T-1}\\
B^T\vec{p}(t) \geqslant \vec{\mu}(t+1),\ t = \overline{0, T-1}\\
\vec{\mu}(t) = \vec{\mu}(t+1) + \vec{r}(t)\\
\vec{\mu}(T) = \vec{\mu}_T\\
\vec{p}(t) \geqslant 0\\
\vec{r}(t) \geqslant 0\\
s(t) \geqslant 0\\
\vec{\mu}_T \geqslant 0
\end{cases} \tag{2.43}$$

Выпишем условия дополняющей нежесткости:

$$\big\langle \vec{p}(t), \vec{x}(t) - A\vec{x}(t) + B\vec{\theta}(t) + \eta(t)\vec{K}\big\rangle = 0,\ t = \overline{0, T-1}; \tag{2.44}$$

$$\left\langle \vec{r}(t), \vec{\xi}(t) - \vec{x}(t) \right\rangle = 0,\ t = \overline{0, T-1}; \tag{2.45}$$

$$s(t)\left(R(t) - \vec{c}\vec{x}\right) = 0,\ t = \overline{0, T-1}; \tag{2.46}$$

$$\left\langle \vec{\mu}(T), \vec{\xi}(T) - \vec{\xi}_T \right\rangle = 0; \tag{2.47}$$

$$\eta(t)(\pi(t) - \vec{p}(t)\vec{K}) = 0,\ t = \overline{0, T-1}; \tag{2.48}$$

$$\left\langle \vec{\theta}(t), \vec{\mu}(t+1) - B^T\vec{p}(t) \right\rangle = 0,\ t = \overline{0, T-1}. \tag{2.49}$$

Предложение 4. *Пусть* $\left(\left\{\hat{\vec{x}}(t), \hat{\eta}(t), \hat{\vec{\theta}}(t), \hat{\vec{\xi}}(t) \mid t = \overline{0, T-1}\right\}, \hat{\vec{\xi}}(T)\right)$ *— решение З. Л. П. (2.42),* $\left(\left\{\hat{\vec{p}}(t), \hat{\vec{r}}(t), \hat{s}(t), \hat{\vec{\mu}}(t) \mid t = \overline{0, T-1}\right\}, \hat{\vec{\mu}}(T), \hat{\vec{\mu}}_T\right)$ *— решение З. Л. П. (2.43) и пусть* $0 \leqslant \tau \leqslant T-1$*. Тогда* $\left(\hat{\vec{x}}(\tau), \hat{\eta}(\tau), \hat{\vec{\theta}}(\tau)\right)$ *является решением З. Л. П. (2.50), а* $\left(\hat{\vec{p}}(\tau), \hat{\vec{r}}(\tau), \hat{s}(\tau)\right)$ *— решением двойственной к З. Л. П. (2.50) задачи (2.51).*

$$\begin{cases} \pi(\tau)\eta(\tau) + \left\langle \hat{\vec{\mu}}(\tau+1), \vec{\theta}(\tau) \right\rangle \to \max \\ \vec{x}(\tau) \geqslant A\vec{x}(\tau) + B\vec{\theta}(\tau) + \eta(\tau)\vec{K} \\ \vec{x}(\tau) \leqslant \hat{\vec{\xi}}(\tau) \\ \vec{c}\vec{x}(\tau) \leqslant R(\tau) \\ \vec{\xi}(t+1) = \vec{\xi}(t) + \vec{\theta}(t),\ t = \overline{0, T-1} \\ \vec{\theta}(\tau) \geqslant 0 \\ \eta(\tau) \geqslant 0 \end{cases} \tag{2.50}$$

(опять же ограничение $\vec{x}(\tau) \geqslant 0$ выполняется автоматически из продуктивности матрицы A).

$$\begin{cases} s(\tau)R(\tau) + \vec{r}(\tau)\hat{\vec{\xi}}(\tau) \to \min \\ \vec{p}(\tau) = A^{\mathrm{T}}\vec{p}(\tau) + s(\tau)\vec{c} + \vec{r}(\tau) \\ \vec{p}(\tau)\vec{K} \geqslant \pi(\tau) \\ B^T\vec{p}(\tau) \geqslant \hat{\vec{\mu}}(\tau+1) \\ \vec{p}(\tau) \geqslant 0 \\ \vec{r}(\tau) \geqslant 0 \\ s(\tau) \geqslant 0 \end{cases} \tag{2.51}$$

Здесь уже $\hat{\vec{\mu}}(\tau+1)$ и $\hat{\vec{\xi}}(\tau)$ являются фиксированными величинами.

Замечание. Каковы же правила подсчета стоимостей мощностей? Арендная плата за пользование производственными мощностями есть

$$\vec{r}(t) = \vec{p}(t) - A^{\mathrm{T}}\vec{p}(t) - s(t)\vec{c},$$

т. е. из стоимости продукции вычитают стоимость сырьевых затрат и выплаты рабочим. Вектор же цен производственных мощностей составляет суммарная прибыль, которую можно получить при их использовании:

$$\vec{\mu}(t) = \sum_{\alpha=t}^{T-1} \vec{r}(\alpha) + \vec{\mu}_T.$$

Доказательство. Условия дополняющей нежесткости для З. Л. П. (2.50) и З. Л. П. (2.51) совпадают с (2.44) — (2.46) и (2.48), (2.49) только при $t = \tau$. Далее пользуемся критерием оптимальности в форме условий дополняющей нежесткости (теорема 2). Ограничения в задаче (2.50) выполняются, т. к. взяты из задачи (2.42); в задаче (2.51) выполняются, т. к. взяты из задачи (2.43). Значит, в силу достаточности, $\big(\hat{\vec{x}}(\tau), \hat{\eta}(\tau), \hat{\vec{\theta}}(\tau)\big)$ является решением З. Л. П. (2.50), а $\big(\hat{\vec{p}}(\tau), \hat{\vec{r}}(\tau), \hat{s}(\tau)\big)$ — решением З. Л. П. (2.51). ■

Стоит отметить, что в рассмотренной выше задаче управлением являлся $(\vec{x}(\cdot), \vec{\theta}(\cdot), \eta(\cdot))$, вектор $\hat{\vec{\xi}}(\tau)$ являлся фазовой траекторией, $\hat{\vec{\mu}}(\tau+1)$ — сопряженной траекторией. Что из себя представлял функционал в задаче (2.50)? Используя условия (2.48) и (2.49) при $t = \tau$, получаем

$$\pi(\tau)\eta(\tau) + \big\langle \hat{\vec{\mu}}(\tau+1), \vec{\theta}(\tau) \big\rangle = \underbrace{\eta(\tau)\vec{p}(\tau)\vec{K}}_{\text{конечное потребление}} + \underbrace{\big\langle \vec{p}(\tau), B\vec{\theta}(\tau) \big\rangle}_{\text{расширение производственных мощностей}}.$$

Таким образом, функция Гамильтона-Понтрягина в терминах модели экономического роста является валовым внутренним продуктом.

Упражнение. Рассмотреть π-модель, в которой R является экзогенным параметром.

2.6 Теорема о магистрали.

I. В развитых странах 20-го века происходила смена политических режимов и ценностей, как следствие, менялись и цели общества. Однако, доля ВВП оставалась неизменной. Магистральная теория рассматривает семейства экстремальных задач, в которых меняется функционал. Например, с приходом фашистского режима изменения претерпела географическая карта мира, что можно интерпретировать как изменение начальных условий в постановке оптимизационной задачи. Как вести себя оптимально?.

II. В современной экономике около 10^9 наименований товаров, потоки которых регулируются скалярным распределением. Как такое возможно?

Теория магистралей и будет отвечать на эти вопросы.

Введем понятие *квазиметрики*. Пусть $\vec{x} \in \mathbb{R}^n,\ \vec{x} \neq 0$ и $\vec{y} \in \mathbb{R}^n,\ \vec{y} \neq 0$. Тогда скалярную функцию

$$\rho(\vec{x}, \vec{y}) = \left\| \frac{\vec{x}}{\|\vec{x}\|} - \frac{\vec{y}}{\|\vec{y}\|} \right\|$$

будем называть квазиметрикой.

Свойства квазиметрики:

1) $\forall \lambda > 0,\ \mu > 0,\ \vec{x} \in \mathbb{R}^n \backslash \{0\},\ \vec{y} \in \mathbb{R}^n \backslash \{0\}$ справедливо, что

$$\rho(\lambda\vec{x}, \mu\vec{y}) = \rho(\vec{x}, \vec{y});$$

2) $\rho(\vec{x}, \vec{y}) = \rho(\vec{x}, \vec{z}) + \rho(\vec{z}, \vec{y}),\ \vec{z} \in \mathbb{R}^n \backslash \{0\}$;

3) $\rho(\vec{x}, \vec{y}) = \rho(\vec{y}, \vec{x})$;

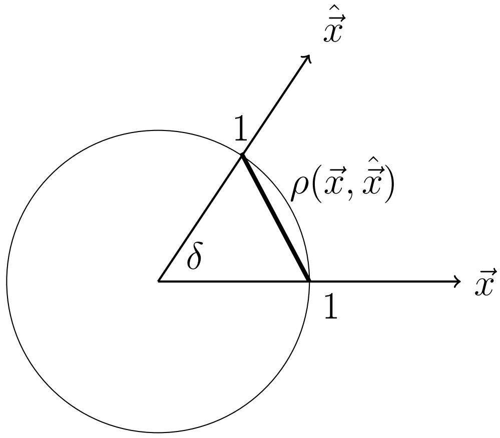
4) $\rho(\vec{x}, \vec{y}) = 0 \ \Leftrightarrow\ \exists \lambda > 0 \mid \vec{y} = \lambda\vec{x}$.

*Это свойство как раз таки определяет *квази*метрику (у метрики $\vec{x} = \vec{y}$);

5) если $\lim\limits_{t\to\infty} \vec{x}(t) = \tilde{\vec{x}} \neq 0,\ \lim\limits_{t\to\infty} \vec{y}(t) = \tilde{\vec{y}} \neq 0$, то $\lim\limits_{t\to\infty} \rho(\vec{x}(t), \vec{y}(t)) = \rho(\tilde{\vec{x}}, \tilde{\vec{y}})$;

6) если $0 < \varepsilon < \sqrt{2},\ \hat{\vec{x}} \neq 0,\ \Gamma_\varepsilon(\hat{\vec{x}}) = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^n \backslash \{0\} \mid \rho(\vec{x}, \hat{\vec{x}}) < \varepsilon\}$, то $\Gamma_\varepsilon(\hat{\vec{x}})$ является выпуклым конусом.

Доказательство свойства 6. Согласно свойству 1 множество $\Gamma_\varepsilon(\hat{\vec{x}})$ является конусом при любом $\varepsilon > 0$. Покажем, что при $0 < \varepsilon < \sqrt{2}$ этот конус выпуклый.



Для любого $0 < \varepsilon < \sqrt{2}$ найдётся $\delta(\varepsilon) > 0,\ \dfrac{\varepsilon}{2} = \sin\dfrac{\delta(\varepsilon)}{2}$ такой, что

$$\rho(\vec{x}, \hat{\vec{x}}) < \varepsilon \ \Leftrightarrow\ \frac{\langle \vec{x}, \hat{\vec{x}} \rangle}{\|\vec{x}\|\|\hat{\vec{x}}\|} > 1 - \delta(\varepsilon).$$

Действительно,

$$\rho(\vec{x}, \hat{\vec{x}}) < \varepsilon \ \Leftrightarrow\ \frac{\langle \vec{x}, \hat{\vec{x}} \rangle}{\|\vec{x}\|\|\hat{\vec{x}}\|} = \cos\angle(\vec{x}, \hat{\vec{x}}) > \cos\delta(\varepsilon) = 1 - 2\sin^2\frac{\delta(\varepsilon)}{2} \boxed{\geqslant}$$

$\sin^2 x < \sin x < x$ на $[0, \frac{\pi}{2}]$

$$\boxed{\geqslant} 1 - 2\frac{\delta(\varepsilon)}{2} = 1 - \delta(\varepsilon).$$

Тогда для любых $\vec{x} \in \Gamma_\varepsilon(\hat{\vec{x}})$ и $\vec{y} \in \Gamma_\varepsilon(\hat{\vec{x}})$ справедливо следующее:

$$\langle \vec{x}, \hat{\vec{x}} \rangle > (1 - \delta(\varepsilon)) \, \|\vec{x}\| \|\hat{\vec{x}}\|$$

$$\langle \vec{y}, \hat{\vec{x}} \rangle > (1 - \delta(\varepsilon)) \, \|\vec{y}\| \|\hat{\vec{x}}\|,$$

откуда

$$\begin{aligned} \langle \vec{x} + \vec{y}, \hat{\vec{x}} \rangle > (1 - \delta(\varepsilon)) \, (\|\vec{x}\| + \|\vec{y}\|) \, \|\hat{\vec{x}}\| \geqslant \\ \geqslant (1 - \delta(\varepsilon)) \, \|\vec{x} + \vec{y}\| \|\hat{\vec{x}}\| \end{aligned},$$

т. е. $\vec{x} + \vec{y} \in \Gamma_\varepsilon(\hat{\vec{x}}) \;\Rightarrow\; \Gamma_\varepsilon(\hat{\vec{x}})$ — выпуклый конус. ■

Задача, которую мы будем рассматривать, описывается динамической моделью Леонтьева[6]

$$\begin{cases} A\vec{x}(t+1) \leqslant \vec{x}(t) \ (t = 0, \ldots, T-1) \\ \vec{x}(0) = \vec{x}_0 \\ \vec{x}(t) \geqslant 0 \ (t = 1, \ldots, T) \end{cases} \tag{2.52}$$

Целью является максимизация конечного выпуска

$$\vec{c}\vec{x}(T) \to \max, \tag{2.53}$$

Здесь $\vec{c} \in \mathbb{R}^n_+ \backslash \{0\}$, $\vec{x}_0 \in \mathrm{int}\mathbb{R}^n_+$, T — параметры такого семейства задач. Матрица A фиксирована для всего семейства, что характерно для развитых капиталистических стран.

Определение 4 (Самуэльсон, Дорфман, Солоу).

Будем говорить, что $\hat{\vec{x}} \neq 0$ является *магистралью* для семейства экстремальных задач (2.52) — (2.53), если для $\forall \varepsilon > 0 \; \exists \tau_1(\varepsilon, A) > 0, \; \tau_2(\varepsilon, A) > 0$, не зависящие от $\vec{c}, \; \vec{x}_0, \; T$ такие, что решение $\{\vec{x}(t) \mid t = 1, \ldots, T\}$ З. Л. П. (2.52) — (2.53) удовлетворяет при $\tau_1(\varepsilon, A) \leqslant t \leqslant T - \tau_2(\varepsilon, A)$ неравенствам

$$\rho(\vec{x}(t), \hat{\vec{x}}) < \varepsilon.$$

Определение можно проинтерпретировать следующим образом. Допустим, нам надо попасть из одной точки мегаполиса в другую. В данном случае движение по кратчайшему пути не всегда будет оптимальным ответом — иногда правильнее будет выехать на магистраль и сделать «крюк», при этом проехать участок пути на бóльшей скорости.

[6] Нам достаточно для прозрачности повествования использовать модель Леонтьева, хотя есть и ее обобщения — модель Неймана, в которой кроме матрицы затрат A вводится матрица выпуска B, и которая, в свою очередь, является частным случаем модели Гейла.

Теорема 4 (Моришима М.).

Пусть A — устойчивая матрица, $\vec{x}_A$ — ее вектор Фробениуса-Перрона, т. е. $A\vec{x}_A = \lambda(A)\vec{x}_A,\ \vec{x}_A > 0$.

Тогда $\vec{x}_A$ является магистралью для семейства задач линейного программирования (2.52) — (2.53) с параметрами $\vec{c} \in \mathbb{R}^n_+ \backslash \{0\},\ \vec{x}_0 \in \mathrm{int}\mathbb{R}^n_+,\ T > 0$.

Напомним теорему 6 главы 1 в терминах квазиметрики (нам понадобится лишь часть этой теоремы, отвечающая за достаточность).

Теорема 5 (об устойчивых матрицах).

Пусть A — устойчивая матрица и $\vec{x}_A$ — ее вектор Фробениуса-Перрона. Тогда для $\forall\varepsilon > 0,\ \forall\vec{y}(0) \in \mathbb{R}^n_+\backslash\{0\}$ существует число $\tau(\varepsilon, A, \vec{y}(0))$ такое, что при $t \geqslant \tau(\varepsilon, A, \vec{y}(0))$ справедливо неравенство

$$\rho\left(A^t\vec{y}(0), \vec{x}_A\right) < \varepsilon.$$

Здесь $\vec{y}(t) = A^t\vec{y}(0)$, а $\vec{y}(t+1)$ — решение системы $\vec{y}(t+1) = A\vec{y}(t)$.

Усилением этой теоремы будет следующая лемма.

Лемма 1. *Пусть A — устойчивая матрица и $\vec{x}_A$ — ее вектор Фробениуса-Перрона. Тогда для $\forall\varepsilon > 0$ существует число $\tau(\varepsilon, A)$ такое, что для $\forall\vec{y}(0) \in \mathbb{R}^n_+\backslash\{0\}$ и $\forall t \geqslant \tau(\varepsilon, A)$ справедливо неравенство*

$$\rho\left(A^t\vec{y}(0), \vec{x}_A\right) < \varepsilon.$$

Доказательство. Пусть $\vec{e}_i$ — единичный вектор (i-я компонента равна 1, остальные — 0). Тогда можно представить $\vec{y}(0)$ как

$$\vec{y}(0) = \sum_{i=1}^{n}[\vec{y}(0)]_i\vec{e}_i,$$

где $[\vec{y}(0)]_i \geqslant 0,\ i = 1, \ldots, n$. Соответственно

$$A^t\vec{y}(0) = \sum_{i=1}^{n}[\vec{y}(0)]_iA^t\vec{e}_i.$$

Положим $\tau(\varepsilon, A) \stackrel{\circ}{=} \max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}\tau(\varepsilon, A, \vec{e}_i)$. Тогда для $t \geqslant \tau(\varepsilon, A) \geqslant \tau(\varepsilon, A, \vec{e}_i)$ выполняется

$$\rho(A^t\vec{e}_i, \vec{x}_A) < \varepsilon,$$

что равносильно $A^t\vec{e}_i \in \Gamma_\varepsilon(\vec{x}_A)$, откуда, в силу свойства 6) квазиметрики, $A^t\vec{y}(0) \in \Gamma_\varepsilon(\vec{x}_A)$. ■

Следствие 2. *Пусть A — устойчивая матрица. Тогда $\exists\tau_0(A) > 0$ такое, что $\forall\vec{y}(0) \in \mathbb{R}^n_+\backslash\{0\}$ при $t \geqslant \tau(A)$ справедливо неравенство*

$$A^t\vec{y}(0) > 0.$$

Доказательство. Заметим, что $\vec{x}_A > 0$ (т. к. A неразложима). Тогда $\exists \varepsilon_0 > 0$ такое, что $\forall \vec{x} \in \Gamma_{\varepsilon_0}(\vec{x}_A)$ будет положителен, т. е. $\vec{x} > 0$

Положим $\tau_0(A) = \tau(\varepsilon_0, A)$ (фигурирующее в доказательстве леммы 1). Тогда при $t \geqslant \tau_0(A)$

$$A^t \vec{y}(0) \in \Gamma_{\varepsilon_0}(\vec{x}_A),$$

откуда $A^t \vec{y}(0) > 0$. ∎

Лемма 2. *Пусть A — устойчивая матрица и $\{\vec{x}(t) \mid t = 1, \dots, T\}$ — решение З. Л. П. (2.52) — (2.53) с параметрами $\vec{c} \in \mathbb{R}^n_+ \backslash \{0\}$, $\vec{x}_0 \in \mathrm{int} \mathbb{R}^n_+$. Тогда*

$$\vec{c}\vec{x}(T) > 0.$$

Доказательство. Введем $\hat{\vec{x}}(t) \overset{\circ}{=} \beta \lambda(A)^{-t} \vec{x}_A$, где $\beta > 0$ подберем позже.
Так как матрица A устойчива, то $\vec{x}_A > 0$, $\lambda(A) > 0$.
Тогда $\vec{c}\hat{\vec{x}}(T) = \beta \lambda(A)^{-T} \vec{c}\vec{x}_A > 0$. Таким образом, $\hat{\vec{x}}(t) > 0$ при $t = 1, \dots, T$.

$$\begin{aligned} A\hat{\vec{x}}(t+1) &= \beta \lambda(A)^{-t-1} A \vec{x}_A = \\ &= \beta \lambda(A)^{-t} \vec{x}_A = \\ &= \hat{\vec{x}}(t) \text{ при } t = 1, \dots, T-1. \end{aligned}$$

При $t = 0$ $A\hat{\vec{x}}(1) \leqslant \vec{x}_0 \ \Leftrightarrow$

$$\begin{aligned} &\Leftrightarrow \ \beta \lambda(A)^{-1} A \vec{x}_A \leqslant \vec{x}_0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \ \beta \vec{x}_A \leqslant \vec{x}_0, \end{aligned}$$

значит выбираем β как

$$\beta \overset{\circ}{=} \min_{1 \leqslant i \leqslant n} \frac{[\vec{x}_0]_i}{[\vec{x}_A]_i}.$$

∎

Прежде чем доказывать непосредственно теорему Моришимы, перейдем к задаче, двойственной к (2.52) — (2.53). Для этого составим ее функцию Лагранжа, перегруппировав слагаемые в функции для прямой задачи:

$$\begin{aligned} &\mathscr{L}\left(\{\vec{x}(t) \mid t = 1, \dots, T\}, \{\vec{p}(t) \mid t = 0, \dots, T-1\}\right) = \\ &= \vec{c}\vec{x}(T) + \sum_{t=1}^{T-1} \langle \vec{p}(t), \vec{x}(t) - A\vec{x}(t+1) \rangle + \langle \vec{p}(0), \vec{x}_0 - A\vec{x}(1) \rangle = \\ &= \vec{p}(0)\vec{x}_0 + \sum_{t=1}^{T-1} \langle \vec{x}(t), \vec{p}(t) - A^{\mathrm{T}}\vec{p}(t-1) \rangle + \langle \vec{x}(T), \vec{c} - A^{\mathrm{T}}\vec{p}(T-1) \rangle. \end{aligned}$$

Таким образом, двойственная задача имеет вид

$$\begin{cases} \vec{p}(0)\vec{x}_0 \to \min \\ A^{\mathrm{T}}\vec{p}(t-1) \geqslant \vec{p}(t) \ t = 1, \ldots, T-1 \\ A^{\mathrm{T}}\vec{p}(T-1) \geqslant \vec{c} \\ \vec{p}(t) \geqslant 0, \ t = 0, \ldots, T-1 \end{cases} \tag{2.54}$$

Условия дополняющей нежесткости для задачи (2.52) — (2.53):

$$\begin{aligned} &\langle \vec{p}(t), \vec{x}(t) - A\vec{x}(t+1) \rangle = 0, \ t = 1, \ldots, T-1 \\ &\langle \vec{p}(0), \vec{x}_0 - A\vec{x}(1) \rangle = 0 \end{aligned} \tag{2.55}$$

для задачи (2.54):

$$\begin{aligned} &\langle \vec{x}(t), \vec{p}(t) - A^{\mathrm{T}}\vec{p}(t-1) \rangle = 0, \ t = 1, \ldots, T-1 \\ &\langle \vec{x}(T), \vec{c} - A^{\mathrm{T}}\vec{p}(T-1) \rangle = 0 \end{aligned} \tag{2.56}$$

Доказательство теоремы 4 .

1) $A\vec{x}(T) \leqslant \vec{x}(T-1)$

$$A^{\theta}\vec{x}(T) \leqslant \vec{x}(T-\theta)$$

$$A^{\theta+1}\vec{x}(T) \leqslant A\vec{x}(T-\theta) \leqslant \vec{x}(T-\theta-1)$$

Из леммы 2 следует, что $\vec{x}(T) \in \mathbb{R}^n_+ \backslash \{0\}$. В силу следствия 2 при $\theta \geqslant \tau_0(A)$ имеем, что $A^{\theta}\vec{x}(T) > 0$. Тогда $\vec{x}(t) > 0$ при $t = 1, \ldots, T - \tau_0(A)$.

2) Из (2.54) и (2.56) имеем, что $\vec{p}(t) = A^{\mathrm{T}}\vec{p}(t-1)$ при $t = 1, \ldots, T - \tau_0(1)$, откуда

$$\vec{p}(t) = (A^{\mathrm{T}})^t\vec{p}(0), \ t = 1, \ldots, T - \tau_0(A).$$

По теореме двойственности $\vec{p}(0)\vec{x}_0 = \vec{c}\vec{x}(T) > 0$ (последнее неравенство выполняется в силу леммы 2). Тогда $\vec{p}(0) \in \mathbb{R}^n_+ \backslash \{0\}$.

Так как A устойчива, то и A^{T} устойчива, а значит, по следствию 2, при $\tau_0(A^{\mathrm{T}}) \leqslant t \leqslant T - \tau_0(A)$ имеем, что $\vec{p}(t) > 0$.

3) Из (2.52) — (2.53) и (2.55) получаем, что $\vec{x}(t) = A\vec{x}(t+1)$ при $t = \tau_0(A^{\mathrm{T}}), \ldots, T - \tau_0(A)$. $\vec{x}(T - \tau_0(A)) > 0$

$$\vec{x}(t) = A^{T-\tau_0(A)-t}\vec{x}(T - \tau_0(A)), \ t = \tau_0(A^{\mathrm{T}}), \ldots, T - \tau_0(A).$$

В силу леммы 1 имеем, что при $T - \tau_0(A) - t \geqslant \tau(\varepsilon, A)$ и $\tau_0(A^{\mathrm{T}}) < t$ справедливо, что

$$\rho(\vec{x}(t), \vec{x}_A) < \varepsilon.$$

Полагая $\tau_1(\varepsilon, A) = \tau_0(A^{\mathrm{T}})$ и $\tau_2(\varepsilon, A) = \tau_0(A) + \tau(\varepsilon, A)$, получаем, что $\vec{x}_A$ — магистраль для семейства З. Л. П. (2.52) — (2.53). ■

Определение 4 даёт понятие магистрали в сильной форме. В модели Гейла — в слабой (нельзя сказать в какие именно исключительные моменты времени условие не выполняется). В сильнейшей форме $\rho(\vec{x}(t), \hat{\vec{x}}) = 0$, что мы и доказали.

2.7 Модель Кокса-Росса-Рубинштейна[7].

В 1960-м году колониальные страны получили независимость[8]. Нефтедобывающие страны стремились вернуть контроль над своими ресурсами. С транснациональными компаниями были заключены договорённости, согласно которым они могли добывать нефть на территории этих стран ещё в течение 15 лет. Затраты на добычу нефти в текущих ценах составляли около 10 млрд \$. В начале 70-х годов правительства стран — членов ОПЕК уже полностью регулировали производство нефти на своей территории и в 1973 году искусственно повысили цены на нефть. Реакцией других стран на такую монополию стран-нефтедобытчиков стал энергетический кризис 1974-го, который сильнее всего ударил по развитым странам (СССР пришлось снизить энергопотребление на 15% чтобы выйти из него).

В 1980-е происходит образование финансовых рынков, оторванных от реальной экономики за счёт вливающихся туда средств (в 1980 году объем финансовых активов составлял 120% мирового ВВП, в 2007-м — 355%). Характерное время изменения цен на финансовых рынках намного меньше, чем в реальной экономике. На поведение цен влияют финансовые риски. Например, компании, имеющие выход на рынки Европы и Америки (торгуют на которых соответственно в евро и долларах) сталкиваются с рисками потерь из-за денежных переводов и невыгодных кредитов. Перед ними ставится задача избежать риски. Обсуждаемая нами модель как раз нейтральна к риску.

Будем в моменты времени $t = 0, 1, \ldots, T$ рассматривать состояние финансового рынка, на котором циркулируют активы двух видов: облигации (безрисковые активы[9]) и акции (рисковые активы).

Будем считать, что безрисковая процентная ставка $r - 1$ постоянна в каждый момент времени. Тогда цена облигации b в каждый период времени увеличивается в r раз.

Норма доходности акции в каждый период времени может принимать одно из двух возможных значений: $u - 1$ или $d - 1$ $(d < u)$. Таким образом, цена акции s в следующий момент времени может пойти как вверх us, так и вниз ds.

Нам интересен случай, когда

$$d < r < u$$

(если $r < d$, то будут покупаться только акции, а если $r > u$ — только облигации).

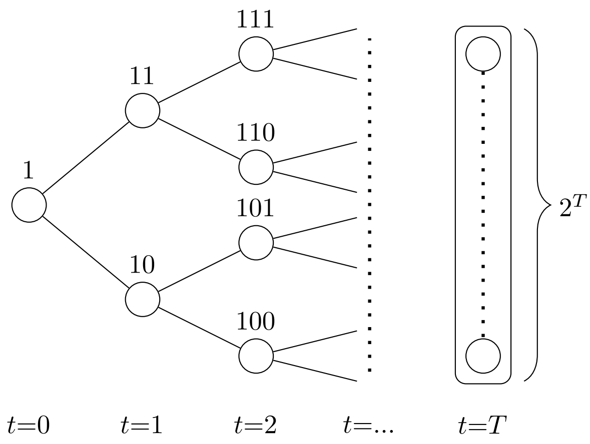
Уточним понятие состояния финансового рынка. Начальное состояние 1 задаётся известными значениями $b(1)$ и $s(1)$ в момент времени $t = 0$. Следующие

[7] Непрерывный аналог Блэка-Шоулза этой модели был удостоен нобелевской премии по математике.

[8] Декларация о предоставлении независимости колониальным странам и народам была принята по инициативе СССР 14 декабря 1960 на 15-й сессии ГА ООН.

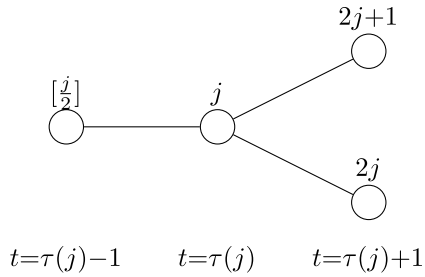
[9] Есть ли безрисковые активы в реальной жизни? Таковыми считаются ценные бумаги американского казначейства.

состояния определяются как узлы двоичного дерева: состоянию приписывается 1, если цена акции пошла вверх и 0, если вниз.



Всего в таком дереве $2^{T+1}-1$ состояний, 2^T из которых — терминальные.

Так, промежуточному состоянию j, которому соответствует период времени $\tau(j)=[\log_2 j]$, предшествует состояние $[\frac{j}{2}]$. Из состояния j можно попасть в состояния $2j$ и $2j+1$:



причём

$$\frac{b(2j)}{b(j)}=\frac{b(2j+1)}{b(j)}=r, \quad \frac{s(2j)}{s(j)}=d, \quad \frac{s(2j+1)}{s(j)}=u. \tag{2.57}$$

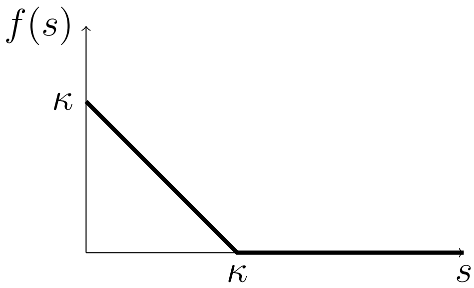
Чтобы избежать риски, связанные с изменением цены акции в момент времени T, между торгующими на финансовом рынке спекулянтами (или брокерами) заключаются опционные контракты. Опцион — это ценная бумага, владелец которой получает право купить или продать (в зависимости от вида опциона) акцию по заданной цене (называемой ценой исполнения опциона). Воспользоваться этим правом владелец *европейского* опциона может только в заданный момент времени — в срок исполнения опциона. Владелец же *американского* опциона может исполнить его в любой момент времени до срока исполнения включительно. Мы будем рассматривать европейские опционы со сроком исполнения T.

Примеры опционов:

1) *Опцион на продажу (put — пут-опцион)* даёт право продать акцию в момент времени T по цене исполнения κ. Если цена акции s не меньше, чем κ, то мы её продаём, не пользуясь этим правом. В противном случае, мы исполняем опцион

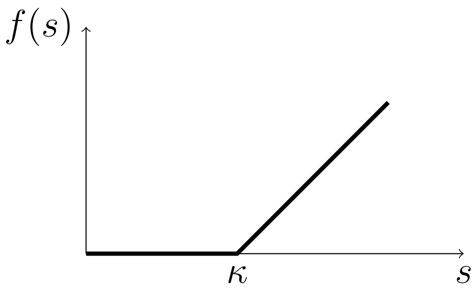
и продаём акцию по цене κ спекулянту, с которым заключили контракт. Таким образом, платёж по пут-опциону $f(s)$ есть

$$f(s) = \begin{cases} 0, & \text{если } s \geqslant \kappa \\ \kappa - s, & \text{если } s < \kappa \end{cases} \quad \text{или} \quad f(s) = (\kappa - s)_+.$$



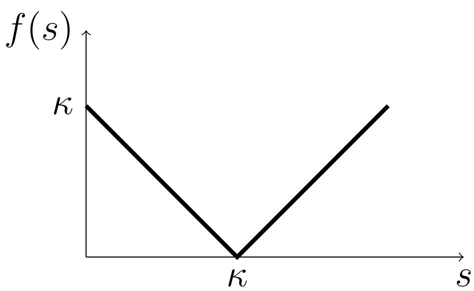
2) *Опцион на покупку (call — колл-опцион)* даёт право купить акцию в момент времени T по цене исполнения κ. Если цена акции s меньше, чем κ, то мы её покупаем, не пользуясь этим правом. В противном случае, мы исполняем опцион и покупаем акцию по цене κ у спекулянта, с которым заключили контракт. Таким образом, платёж по колл-опциону $f(s)$ есть

$$f(s) = \begin{cases} s - \kappa, & \text{если } s \geqslant \kappa \\ 0, & \text{если } s < \kappa \end{cases} \quad \text{или} \quad f(s) = (s - \kappa)_+.$$



3) *Опцион «стеллаж»* даёт право или купить, или продать акцию в момент времени T по цене исполнения κ. С учётом вышесказанного, функция платежа $f(s)$ такого опциона есть

$$f(s) = (s - \kappa)_+ + (\kappa - s)_+ = |s - \kappa|.$$



Спекулянт, который продал опцион в начале торгов ($t = 0$) должен суметь выплатить по нему платёж в срок исполнения. На полученные от заключения опционного контракта деньги он составляет портфель ценных бумаг и начинает торговать (причём он может продавать акции и облигации которых у него нет на момент продажи — т. е. может войти в короткую позицию). Количество облигаций в портфеле в состоянии j обозначим $\beta(j)$, а число акций — $\gamma(j)$. Тогда стоимость портфеля $(\beta(j), \gamma(j))$ в состоянии j равна

$$x(j) = b(j)\beta(j) + s(j)\gamma(j).$$

Когда в следующем состоянии стоимость портфеля изменится, спекулянт будет перераспределять активы уже исходя уже из имеющихся средств в размере

$$b(2j+1)\beta(j) + s(2j+1)\gamma(j) \quad \text{или} \quad b(2j)\beta(j) + s(2j)\gamma(j).$$

Таким образом, должно выполняться условие самофинансирования:

$$\begin{aligned} b(2j+1)\beta(j) + s(2j+1)\gamma(j) &= b(2j+1)\beta(2j+1) + s(2j+1)\gamma(2j+1),\\ b(2j)\beta(j) + s(2j)\gamma(j) &= b(2j)\beta(2j) + s(2j)\gamma(2j), \quad j = \overline{1, 2^T - 1}. \end{aligned}$$

Его можно переписать в виде

$$b(j)\beta([\tfrac{j}{2}]) + s(j)\gamma([\tfrac{j}{2}]) = b(j)\beta(j) + s(j)\gamma(j), \quad j = \overline{2, 2^T - 1}.$$

Выплата по опциону в срок исполнения будет возможна при условии, что платёж в терминальных состояниях не превосходит имеющихся средств:

$$b(j)\beta([\tfrac{j}{2}]) + s(j)\gamma([\tfrac{j}{2}]) \geqslant f(s(j)), \quad j = \overline{2^T, 2^{T+1} - 1}.$$

Итак, какую минимальную сумму денег нужно иметь в начальный период времени спекулянту, чтобы, обладая финансовым портфелем, гарантированно выплатить платёж по вторичному финансовому инструменту в срок его исполнения? Иными словами, мы ищем «справедливую» цену дериватива, который спекулянт продаёт в начальный момент времени.

$$\begin{cases} b(1)\beta(1) + s(1)\gamma(1) \to \min \\ b(j)\beta([\tfrac{j}{2}]) + s(j)\gamma([\tfrac{j}{2}]) = b(j)\beta(j) + s(j)\gamma(j), \quad j = \overline{2, 2^T - 1} & \big|\tilde{p}(j) \\ b(j)\beta([\tfrac{j}{2}]) + s(j)\gamma([\tfrac{j}{2}]) \geqslant f(s(j)), \quad j = \overline{2^T, 2^{T+1} - 1} & \big|\tilde{p}(j) \geqslant 0 \end{cases} \tag{2.58}$$

Выпишем функцию Лагранжа:

$$\begin{aligned}
&\mathscr{L}\left(\left\{\beta(j),\gamma(j)|j=\overline{1,2^T-1}\right\},\left\{\tilde{p}(j)|j=\overline{2,2^{T+1}-1}\right\}\right)=\\
&=b(1)\beta(1)+s(1)\gamma(1)+\\
&+\sum_{j=2}^{2^T-1}\tilde{p}(j)\Big(b(j)\beta(j)+s(j)\gamma(j)-b(j)\beta([\tfrac{j}{2}])-s(j)\gamma([\tfrac{j}{2}])\Big)+\\
&+\sum_{j=2^T}^{2^{T+1}-1}\tilde{p}(j)\Big(f(s(j))-b(j)\beta([\tfrac{j}{2}])-s(j)\gamma([\tfrac{j}{2}])\Big)=\\
&=\sum_{j=2^T}^{2^{T+1}-1}\tilde{p}(j)f(s(j))+\beta(1)\Big(b(1)-\tilde{p}(2)b(2)-\tilde{p}(3)b(3)\Big)+\\
&+\gamma(1)\Big(s(1)-\tilde{p}(2)s(2)-\tilde{p}(3)s(3)\Big)+\\
&+\sum_{j=2}^{2^T-1}\beta(j)\Big(\tilde{p}(j)b(j)-\tilde{p}(2j)b(2j)-\tilde{p}(2j+1)b(2j+1)\Big)+\\
&+\sum_{j=2}^{2^T-1}\gamma(j)\Big(\tilde{p}(j)s(j)-\tilde{p}(2j)s(2j)-\tilde{p}(2j+1)s(2j+1)\Big).
\end{aligned}$$

Таким образом, двойственная к (2.58) задача имеет вид

$$\begin{cases}
\sum\limits_{j=2^T}^{2^{T+1}-1}\tilde{p}(j)f(s(j))\to\max & \\
\tilde{p}(2)b(2)+\tilde{p}(3)b(3)=b(1) & \Big|:b(1)\\
\tilde{p}(2)s(2)+\tilde{p}(3)s(3)=s(1) & \Big|:s(1)\\
\tilde{p}(2j)b(2j)+\tilde{p}(2j+1)b(2j+1)=\tilde{p}(j)b(j),\quad j=\overline{2,2^T-1} & \Big|:b(j)\\
\tilde{p}(2j)s(2j)+\tilde{p}(2j+1)s(2j+1)=\tilde{p}(j)s(j),\quad j=\overline{2,2^T-1} & \Big|:s(j)\\
\tilde{p}(j)\geqslant 0,\quad j=\overline{2^T,2^{T+1}-1} &
\end{cases}\tag{2.59}$$

Условия дополняющей нежёсткости

$$\tilde{p}(j)\Big(f(s(j))-b(j)\beta([\tfrac{j}{2}])-s(j)\gamma([\tfrac{j}{2}])\Big)=0,\quad j=\overline{2^T,2^{T+1}-1}.\tag{2.60}$$

Разделив условия в двойственной задаче на $b(j)$, $s(j)$ с учётом (2.57), получим

$$\begin{aligned}
&\tilde{p}(2)r+\tilde{p}(3)r=1 && \Big|u\\
&\tilde{p}(2)d+\tilde{p}(3)u=1 && \Big|r\\
&\tilde{p}(2j)r+\tilde{p}(2j+1)r=\tilde{p}(j),\quad j=\overline{2,2^T-1} &&\\
&\tilde{p}(2j)d+\tilde{p}(2j+1)u=\tilde{p}(j),\quad j=\overline{2,2^T-1} &&
\end{aligned}$$

После несложных преобразований, получим следующие рекурентные формулы для переменных двойственной задачи:

$$\tilde{p}(2) = \frac{1}{r}\left(\frac{u-r}{u-d}\right), \qquad \tilde{p}(3) = \frac{1}{r}\left(\frac{r-d}{u-d}\right);$$
$$\tilde{p}(2j) = \frac{1}{r}\left(\frac{u-r}{u-d}\right)\tilde{p}(j), \quad \tilde{p}(2j+1) = \frac{1}{r}\left(\frac{r-d}{u-d}\right)\tilde{p}(j), \quad j = \overline{2, 2^T-1}.$$

Обозначим $0 < p^* \overset{\circ}{=} \frac{u-r}{u-d} < 1$ и определим $p(j)$ как

$$p(2) = p^*, \qquad p(3) = 1 - p^*;$$
$$p(2j) = p^* p(j), \quad p(2j+1) = (1-p^*)p(j), \quad j = \overline{2, 2^T-1}.$$

Тогда $\tilde{p}(j) = r^{-\tau(j)}p(j),\ j = \overline{2, 2^T-1}$. Заметим, что $\sum\limits_{j|\tau(j)=const} p(j) = 1$. Величина $p(j)$ интерпретируется как вероятность нахождения финансового рынка в состоянии j.

Предложение 5 (Формула Кокса-Росса-Рубинштейна)**.** *Оптимальное значение функционала в задаче* (2.58) *равно*

$$r^{-T}\sum_{k=0}^{T} C_T^k (p^*)^k (1-p^*)^{T-k} f(s(1)d^k u^{T-k}), \tag{2.61}$$

где $p^* = \frac{u-r}{u-d}$.

Доказательство. По теореме двойственности оптимальное значение функционала в задаче (2.58) равно оптимальному значению функционала в задаче (2.59):

$$b(1)\beta(1) + s(1)\gamma(1) = \sum_{j=2^T}^{2^{T+1}-1} \tilde{p}(j) f(s(j)) = r^{-T}\sum_{j=2^T}^{2^{T+1}-1} p(j) f(s(j)).$$

Двоичная запись терминального состояния j содержит $T+1$ разрядов. Вероятность попадания в состояния с одинаковым числом нулей $k = \overline{0, T}$ одна и та же и равна
$$p(j) = (p^*)^k (1-p^*)^{T-k}.$$
Цена акции в таких состояниях равна
$$s(j) = s(1)u^k d^{T-k}.$$

Понятно, что число таких состояний равно C_T^k. ■

Формула (2.61) представляет собой не что иное, как математическое ожидание дисконтируемого дохода.

2.8 Теория арбитража.

2.9 Анализ экономических механизмов распределения ресурсов.

2.9.1 Модель Хаутеккера-Иохансена.

2.9.2 Нелинейный межотраслевой баланс.

2.9.3 Максимизация объемов производства (административные механизмы распределения ресурсов).

2.9.4 «Хозрасчет». Максимизация нормативной чистой продукции.

2.9.5 Равновесные рыночные механизмы.

Глава 3

Математические модели коллективного поведения и экономического равновесия.

3.1 Некоторые сведения из теории игр.

3.2 Модель олигополии Курно.

3.3 Теорема Брауэра о неподвижной точке.

3.3.1 Барицентрические подразделения симплекса.

3.3.2 Лемма Шпернера.

3.4 Теорема Фань-Цзы.

3.4.1 Вариационное неравенство.

3.5 Модель Эрроу-Дебре.

3.5.1 Концепция конкурентного равновесия. Законы Вальраса.

3.5.2 Модификация функций спроса и предложения.

3.5.3 Сведение к вариационному неравенству (задаче дополнительности).

3.5.4 Существование решения задачи дополнительности.

3.6 Теоремы теории благосостояния.